2次風上差分によるナビエ-ストーク方程式

2007/06/04　後 保範（東京工芸大学）

1.　離散化対象式

下記の速度-圧力法でのナビエ-ストーク方程式を通常格子で離散化する。

（1）保存形

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)/\Delta t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

（2）非保存形

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)/\Delta t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

2.　通常格子での離散化計算式

2.1　P の離散化

風上差分も中心差分も下記を使用する。

$$\frac{2p_{i,j}-p_{i-1,j}-p_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{2p_{i,j}-p_{i,j-1}-p_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}=$$
$$\frac{(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})^2}{4(\Delta x)^2}+\frac{(v_{i,j+1}-v_{i,j-1})^2}{4(\Delta y)^2}+\frac{(v_{i+1,j}-v_{i-1,j})(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})}{2\Delta x\Delta y}$$
$$-\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\Delta x}+\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)/\Delta t$$

2.2 U の離散化

f_1, f_2を風上差分依存項とする。

$$\frac{u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}}{\Delta t} = f_1 + f_2 - \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x}$$
$$-\left(\frac{2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{2u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right) / \mathrm{Re}$$

(1)　中心差分（f_1, f_2の部分の計算式）

時刻$(n+1)\Delta t$の値は$u_{i,j,k}^{(n+1)}$のように右肩に$(n+1)$のインデックスを付けて表示

時刻$n\Delta t$の値は$u_{i,j,k}$のように右肩の(n)のインデックスは省いて表示する。

(a) 保存形

$$f_1 = -\frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2}{2\Delta x}$$

$$f_2 = -\frac{u_{i,j+1} v_{i,j+1} - u_{i,j-1} v_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

(b) 非保存形

$$f_1 = -u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$f_2 = -v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

(2)　1 次精度風上差分（f_1, f_2の部分の計算式）

(a) 保存形

$$f_1 = \begin{cases} -\dfrac{u_{i,j}^2 - u_{i-1,j}^2}{\Delta x} & ; \quad u_{i,j} > 0 \\ -\dfrac{u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2}{2\Delta x} & ; \quad u_{i,j} = 0 \\ -\dfrac{u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2}{\Delta x} & ; \quad u_{i,j} < 0 \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} -\dfrac{u_{i,j}v_{i,j} - u_{i,j-1}v_{i,j-1}}{\Delta y} & ;\ v_{i,j} > 0 \\ -\dfrac{u_{i,j+1}v_{i,j+1} - u_{i,j-1}v_{i,j-1}}{2\Delta y} & ;\ v_{i,j} = 0 \\ -\dfrac{u_{i,j+1}v_{i,j+1} - u_{i,j}v_{i,j}}{\Delta y} & ;\ v_{i,j} < 0 \end{cases}$$

（b）非保存形

$$f_1 = \begin{cases} -u_{i,j}\dfrac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} & ;\ u_{i,j} > 0 \\ -u_{i,j}\dfrac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} & ;\ u_{i,j} = 0 \\ -u_{i,j}\dfrac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} & ;\ u_{i,j} < 0 \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} -v_{i,j}\dfrac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} & ;\ v_{i,j} > 0 \\ -v_{i,j}\dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} & ;\ v_{i,j} = 0 \\ -v_{i,j}\dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} & ;\ v_{i,j} < 0 \end{cases}$$

（3）　3 次精度風上差分（f_1, f_2 の部分の計算式）

（a）保存形

$$f_1 = \begin{cases} -\dfrac{2u_{i+1,j}^2 + 3u_{i,j}^2 - 6u_{i-1,j}^2 + u_{i-2,j}^2}{6\Delta x} & ;\ u_{i,j} > 0 \\ -\dfrac{u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2}{2\Delta x} & ;\ u_{i,j} = 0 \\ \dfrac{u_{i+2,j}^2 - 6u_{i+1,j}^2 + 3u_{i,j}^2 + 2u_{i-1,j}^2}{6\Delta x} & ;\ u_{i,j} < 0 \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} -\dfrac{2u_{i,j+1}v_{i,j+1} + 3u_{i,j}v_{i,j} - 6u_{i,j-1}v_{i,j-1} + u_{i,j-2}v_{i,j-2}}{6\Delta y} & ;\ v_{i,j} > 0 \\ -\dfrac{u_{i,j+1}v_{i,j+1} - u_{i,j-1}v_{i,j-1}}{2\Delta y} & ;\ v_{i,j} = 0 \\ \dfrac{u_{i,j+2}v_{i,j+2} - 6u_{i,j+1}v_{i,j+1} + 3u_{i,j}v_{i,j} + 2u_{i,j-1}v_{i,j-1}}{6\Delta y} & ;\ v_{i,j} < 0 \end{cases}$$

（a）非保存形

$$f_1 = \begin{cases} -u_{i,j}\dfrac{2u_{i+1,j}+3u_{i,j}-6u_{i-1,j}+u_{i-2,j}}{6\Delta x}; & u_{i,j}>0 \\ -u_{i,j}\dfrac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\Delta x}; & u_{i,j}=0 \\ u_{i,j}\dfrac{u_{i+2,j}-6u_{i+1,j}+3u_{i,j}+2u_{i-1,j}}{6\Delta x}; & u_{i,j}<0 \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} -v_{i,j}\dfrac{2u_{i,j+1}+3u_{i,j}-6u_{i,j-1}+u_{i,j-2}}{6\Delta y}; & v_{i,j}>0 \\ -v_{i,j}\dfrac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\Delta y}; & v_{i,j}=0 \\ v_{i,j}\dfrac{u_{i,j+2}-6u_{i,j+1}+3u_{i,j}+2u_{i,j-1}}{6\Delta y}; & v_{i,j}<0 \end{cases}$$

2.3 V の離散化

g_1, g_2を風上差分依存項とする。

$$\frac{v_{i,j}^{(k+1)}-v_{i,j}}{\Delta t} = g_1 + g_2 - \frac{p_{i,j+1}-p_{i,j-1}}{2\Delta y} - \left(\frac{2v_{i,j}-v_{i-1,j}-v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{2v_{i,j}-v_{i,j-1}-v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right)/\mathrm{Re}$$

（1）中心差分（g_1, g_2の計算部分）

（a）保存形

$$g_1 = -\frac{u_{i+1,j}v_{i+1,j}-u_{i-1,j}v_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$g_2 = -\frac{v_{i,j+1}^2-v_{i,j-1}^2}{2\Delta y}$$

（a）非保存形

$$g_1 = -u_{i,j}\frac{v_{i+1,j}-v_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$g_2 = -v_{i,j}\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

(2) 1次精度風上差分(g_1, g_2の計算部分)

(a) 保存形

$$g_1 = \begin{cases} -\dfrac{u_{i,j}v_{i,j} - u_{i-1,j}v_{i-1,j}}{\Delta x} \ ; & u_{i,j} > 0 \\ -\dfrac{u_{i+1,j}v_{i+1,j} - u_{i-1,j}v_{i-1,j}}{2\Delta x} ; & u_{i,j} = 0 \\ -\dfrac{u_{i+1,j}v_{i+1,j} - u_{i,j}v_{i,j}}{\Delta x} \ ; & u_{i,j} < 0 \end{cases}$$

$$g_2 = \begin{cases} -\dfrac{v_{i,j}^2 - v_{i,j-1}^2}{\Delta y} \ ; & v_{i,j} > 0 \\ -\dfrac{v_{i,j+1}^2 - v_{i,j-1}^2}{2\Delta y} ; & v_{i,j} = 0 \\ -\dfrac{v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2}{\Delta y} \ ; & v_{i,j} < 0 \end{cases}$$

(b) 非保存形

$$g_1 = \begin{cases} -u_{i,j}\dfrac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} ; & u_{i,j} > 0 \\ -u_{i,j}\dfrac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} ; & u_{i,j} = 0 \\ -u_{i,j}\dfrac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x} \ ; & u_{i,j} < 0 \end{cases}$$

$$g_2 = \begin{cases} -v_{i,j}\dfrac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} \ ; & v_{i,j} > 0 \\ -v_{i,j}\dfrac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} ; & v_{i,j} = 0 \\ -v_{i,j}\dfrac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} ; & v_{i,j} < 0 \end{cases}$$

(3) 3 次精度風上差分(g_1, g_2 の計算部分)

(a) 保存形

$$g_1=\begin{cases}-\dfrac{2u_{i+1,j}v_{i+1,j}+3u_{i,j}v_{i,j}-6u_{i-1,j}v_{i-1,j}+u_{i-2,j}v_{i-2,j}}{6\Delta x}\ ;\ u_{i,j}>0\\ -\dfrac{u_{i+1,j}v_{i+1,j}-u_{i-1,j}v_{i-1,j}}{2\Delta x}\ ;\ u_{i,j}=0\\ \dfrac{u_{i+2,j}v_{i+2,j}-6u_{i+1,j}v_{i+1,j}+3u_{i,j}v_{i,j}+2u_{i-1,j}v_{i-1,j}}{6\Delta x}\ ;\ u_{i,j}<0\end{cases}$$

$$g_2=\begin{cases}-\dfrac{2v_{i,j+1}^2+3v_{i,j}^2-6v_{i,j-1}^2+v_{i,j-2}^2}{6\Delta y}\ ;\ v_{i,j}>0\\ -\dfrac{v_{i,j+1}^2-v_{i,j-1}^2}{2\Delta y}\ ;\ v_{i,j}=0\\ \dfrac{v_{i,j+2}^2-6v_{i,j+1}^2+3v_{i,j}^2+2v_{i,j-1}^2}{6\Delta y}\ ;\ v_{i,j}<0\end{cases}$$

(b) 非保存形

$$g_1=\begin{cases}-u_{i,j}\dfrac{2v_{i+1,j}+3v_{i,j}-6v_{i-1,j}+v_{i-2,j}}{6\Delta x}\ ;\ u_{i,j}>0\\ -u_{i,j}\dfrac{v_{i+1,j}-v_{i-1,j}}{2\Delta x}\ ;\ u_{i,j}=0\\ u_{i,j}\dfrac{v_{i+2,j}-6v_{i+1,j}+3v_{i,j}+2v_{i-1,j}}{6\Delta x}\ ;\ u_{i,j}<0\end{cases}$$

$$g_2=\begin{cases}-v_{i,j}\dfrac{2v_{i,j+1}+3v_{i,j}-6v_{i,j-1}+v_{i,j-2}}{6\Delta y}\ ;\ v_{i,j}>0\\ -v_{i,j}\dfrac{v_{i,j+1}-v_{i,j-1}}{2\Delta y}\ ;\ v_{i,j}=0\\ v_{i,j}\dfrac{v_{i,j+2}-6v_{i,j+1}+3v_{i,j}+2v_{i,j-1}}{6\Delta y}\ ;\ v_{i,j}<0\end{cases}$$