2次元スタガードメッシュによるナビエ-ストーク方程式

2007/06/04　後 保範（東京工芸大学）

1.　離散化対象式（保存形を使用）

下記の速度-圧力法でのナビエ-ストーク方程式を中心差分法で離散化する。

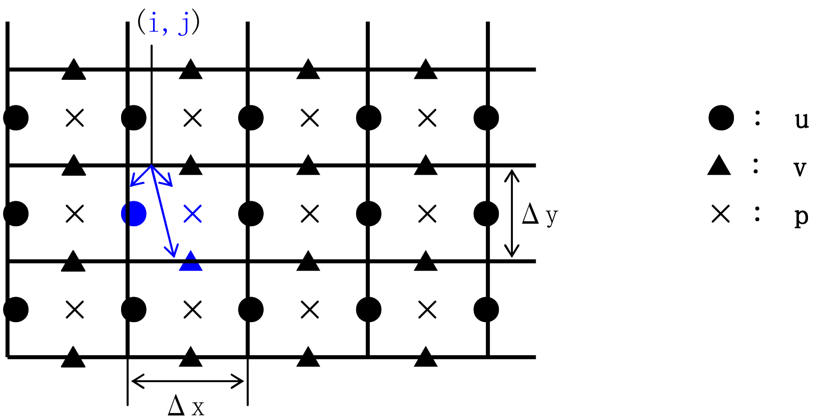
$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)/\Delta t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

2.　スタガードメッシュ

（1）メッシュ



（2）角柱周りの解析における添え字範囲

NX と NY に分割し、角柱の通常格子での分割位置は(NX1-NX2,NY1-NY2)とする。

p, u, v の総ての格子開始位置は(1, 1)とする。

（a）解析範囲

p： $i=1\sim NX$，　$j=1\sim NY$

u： $i=1\sim NX+1$，　$j=1\sim NY$

v： $i=1\sim NX$，　$j=1\sim NY+1$

(b) 角柱の範囲

p: $i = NX1+1 \sim NX2,\quad j = NY1+1 \sim NY2$

u: $i = NX1+1 \sim NX2+1,\quad j = NY1+1 \sim NY2$

v: $i = NX1+1 \sim NX2,\quad j = NY1+1 \sim NY2+1$

3.　離散化計算式

(1) P の離散化(p_{ij}を中心に差分式を作成する。)

離散化が複雑な点は下記の 2 微分

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1})/2 - (v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1})/2}{2\Delta x} = \frac{v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j} - v_{i-1,j+1}}{4\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1})/2 - (u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1})/2}{2\Delta y} = \frac{v_{i,j+1} + v_{i+1,j+1} - v_{i,j-1} - v_{i+1,j-1}}{4\Delta y}$$

従って、p の離散化は下記の様になる。

$$\frac{2p_{i,j} - p_{i-1,j} - p_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{2p_{i,j} - p_{i,j-1} - p_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} =$$

$$\frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(v_{i,j+1} - v_{i,j})^2}{(\Delta y)^2}$$

$$+\frac{(v_{i+1,j} + v_{i+i,j+1} - v_{i-1,j} - v_{i-1,j+1})(u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j-1} - u_{i+1,j-1})}{8\Delta x\Delta y}$$

$$-\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y}\right)/\Delta t$$

(2) U の離散化(u_{ij}を中心に差分式を作成する。)

離散化が複雑な点は下記の微分

$$\frac{\partial (uv)}{\partial y} = \frac{(u_{i,j+1} + u_{i,j})(v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1})/4 - (u_{i,j} + u_{i,j-1})(v_{i,j} + v_{i-1,j})/4}{\Delta y}$$

$$= \frac{(u_{i,j+1} + u_{i,j})(v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1}) - (u_{i,j} + u_{i,j-1})(v_{i,j} + v_{i-1,j})}{4\Delta y}$$

従って、U の離散化は下記の様になる。

$$\frac{u_{i,j}^{(k+1)}-u_{i,j}}{\Delta t}=-\frac{u_{i+1,j}^2-u_{i-1,j}^2}{2\Delta x}-\frac{p_{i,j}-p_{i-1,j}}{\Delta x}$$
$$-\frac{(u_{i,j+1}+u_{i,j})(v_{i,j+1}+v_{i-1,j+1})-(u_{i,j}+u_{i,j-1})(v_{i,j}+v_{i-1,j})}{4\Delta y}$$
$$-\left(\frac{2u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{2u_{i,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right)/\mathrm{Re}$$

(3) V の離散化(vij を中心に差分式を作成する。)

離散化が複雑な点は下記の微分

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x}=\frac{(u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1})(v_{i+1,j}+v_{i,j})/4-(u_{i,j}-u_{i,j-1})(v_{i,j}+v_{i-1,j})/4}{\Delta x}$$
$$=\frac{(u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1})(v_{i+1,j}+v_{i,j})-(u_{i,j}-u_{i,j-1})(v_{i,j}+v_{i-1,j})}{4\Delta x}$$

従って、U の離散化は下記の様になる。

$$\frac{v_{i,j}^{(k+1)}-v_{i,j}}{\Delta t}=-\frac{(u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1})(v_{i+1,j}+v_{i,j})-(u_{i,j}-u_{i,j-1})(v_{i,j}+v_{i-1,j})}{4\Delta x}$$
$$-\frac{v_{i,j+1}^2-v_{i,j-1}^2}{2\Delta y}-\frac{p_{i,j}-p_{i,j-1}}{\Delta y}$$
$$-\left(\frac{2v_{i,j}-v_{i-1,j}-v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{2v_{i,j}-v_{i,j-1}-v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right)/\mathrm{Re}$$

注記)

U,Vの離散化において、$u_{i,j}^{(k+1)}$及び$v_{i,j}^{(k+1)}$は$(k+1)\Delta t$時間の値を示す。

$u_{i,j}$や$v_{i,j}$等は$u_{i,j}^{(k)}$及び$v_{i,j}^{(k)}$で$k\Delta t$時間の値を示し、(k)の添え字は総て省略している。