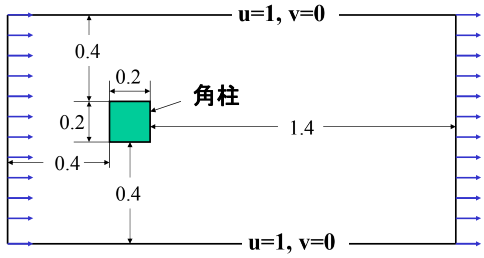
FDM流れ解析　No.6
速度-圧力法で角柱周りの流れ

2007年6月

後　保範 (東京工芸大学)

目次

1. 解析対象



2. 基礎方程式

- ベクトル表示の基礎方程式

$$div\,(v) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v$$

2. 1 2次元の具体的基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

3. 速度-圧力方程式

- 圧力(p)に関する式の導出

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v$$

の発散(rot)をとり, $D = div(v)$を代入する。

$$-\Delta p = div((v \cdot \nabla) v) + \frac{D^{(n+1)} - D^{(n)}}{\Delta t} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta D^{(n)}$$

本来は$D = 0$であり、$D^{(n+1)}$と右辺第3項は無視できる。

$$-\Delta p = div((v \cdot \nabla) v) - \frac{D}{\Delta t}$$

3.1 速度-圧力による方程式

$$-\Delta p = div((v\cdot\nabla)v) - \frac{div(v)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v$$

7

3.2 2次元速度-圧力の具体的方程式

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)/\Delta t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

8

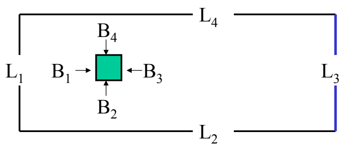
4. 境界条件と初期条件

- u,vの境界条件

u=1.0, v=0.0 on L_1, L_2, L_4

u=0.0, v=0.0 on B_1, B_2, B_3, B_4

$\partial u/\partial x = 0.0,\ \partial v/\partial x = 0.0\ \ on\ L_3$



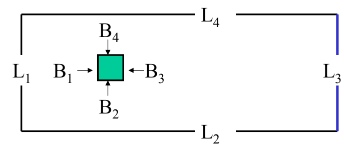
9

4.1 pの境界条件

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad on\ \ L_1, B_1, B_3$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad on\ \ L_2, L_4, B_2, B_4$$

$$p = 0 \quad on\ \ L_3$$



10

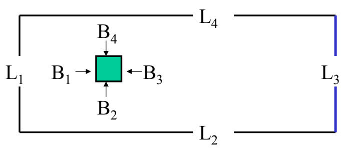
4.2 u,vの初期条件

ポテンシャルフローで 計算

$$-\Delta\phi = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1.0\ \ on\ L_3, \qquad \phi = x \quad on\ L_1, L_2, L_4$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.0\ \ on\ B_1, B_3, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.0\ \ on\ B_2, B_4$$



11

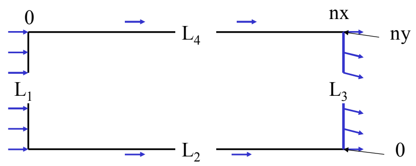
4.3 p計算の外側境界条件(周囲)

$$u_{-1,j} = 1.0, \quad v_{-1,j} = 0.0 \quad on\ \ L_1$$

$$u_{i,-1} = 1.0, \quad v_{i,-1} = 0.0 \quad on\ \ L_2$$

$$u_{nx+1,j} = u_{nx,j}, \quad v_{nx+1,j} = v_{nx,j} \quad on\ \ L_3$$

$$u_{i,ny+1} = 1.0, \quad v_{i,ny+1} = 0.0 \quad on\ \ L_4$$

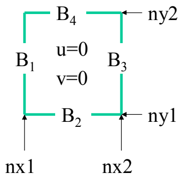


12

4.4 p計算外側境界条件(角柱)

$$u_{nx1+1,j} = 0, \quad v_{nx1+1,j} = 0 \quad on \ B_1$$
$$u_{i,ny1+1} = 0, \quad v_{i,ny1+1} = 0 \quad on \ B_2$$

$$u_{nx2-1,j} = 0, \quad v_{nx2-1,j} = 0 \quad on \ B_3$$
$$u_{i,ny2-1} = 0, \quad v_{i,ny2-1} = 0 \quad on \ B_4$$

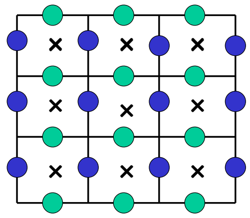


13

5. 差分法による離散化方法

- スタガード格子

●; u格子
●; v格子
×; p格子

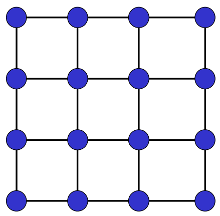


14

5.1 通常格子による離散化

- 通常格子

●; u,v,p格子



15

5.2 pの離散化(通常格子)

$$\frac{2p_{i,j} - p_{i-1,j} - p_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{2p_{i,j} - p_{i,j-1} - p_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} =$$
$$\frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2}{4(\Delta x)^2} + \frac{(v_{i,j+1} - v_{i,j-1})^2}{4(\Delta y)^2} + \frac{(v_{i+1,j} - v_{i-1,j})(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{2\Delta x \Delta y}$$
$$-\left[\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}\right] / \Delta t$$

16

5.3 uの離散化(通常格子)

$$\frac{u^{(k+1)}_{i,j} - u_{i,j}}{\Delta t} = -\frac{u^2_{i+1,j} - u^2_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{u_{i,j+1}v_{i,j+1} - u_{i,j-1}v_{i,j-1}}{2\Delta y}$$
$$-\frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} -$$
$$\left[\frac{2u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{2u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right] / \mathrm{Re}$$

17

5.4 vの離散化(通常格子)

$$\frac{v^{(k+1)}_{i,j} - v_{i,j}}{\Delta t} = -\frac{u_{i+1,j}v_{i+1,j} - u_{i-1,j}v_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{v^2_{i,j+1} - v^2_{i,j-1}}{2\Delta y}$$
$$-\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} -$$
$$\left[\frac{2v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{2v_{i,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right] / \mathrm{Re}$$

18

6 プログラム全体計算手順

nx,ny,Re数, Δt, NT(回数),MT(出力間隔)入力
Δx=2.0/nx, Δy=1.0/ny
ポテンシャル流れでu,v(7.を使用)の初期値を計算
k=1,2,･･･,NTまで反復計算
    t = t + Δt
    SORで法pの計算 (7.3～7.4を使用)
    u,vの計算 (7.1～7.2を使用)
    if(発散(Over変数で判定)) --> 発散として停止
    if(mod(k,MT)==0) --> u,v,pの出力

19

7. プログラムの主要部分

- u,vの初期条件(ポテンシャルフローで計算)

  プログラムのPHISOL関数を参照

  φ境界条件の設定

  -Δφ= 0を離散化しAφ=bを作成

  Aφ=bの解φをSOR法で求める

  $u_{i,j}=(\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j})/2\Delta x$,　$v_{i,j}=(\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1})/2\Delta y$

  u,vの境界上の値をセット

20

7.1 u,vの計算(通常格子)

- dt=Δt, dx=1/(2Δx), dy=1/(2Δy), ddx=1/(Δx)^2, ddy=1/(Δy)^{2}とする。

```
U(i,j) = U(i,j) - dt*((U(i+1,j)*U(i+1,j) - U(i-1,j)*U(i-1,j))*dx
        + (U(i,j+1)*V(i,j+1) - U(i,j-1)*V(i,j-1))*dy
        + (P(i+1,j) - P(i-1,j))*dx
        + ( (2.0*U(i,j) - U(i-1,j) - U(i+1,j))*ddx
        + (2.0*U(i,j) - U(i,j-1) - U(i,j+1))*ddy )/Re ) ;
V(i,j) = V(i,j) - dt*((V(i,j+1)*V(i,j+1) - V(i,j-1)*V(i,j-1))*dy
        + (U(i+1,j)*V(i+1,j) - U(i-1,j)*V(i-1,j))*dx
        + (P(i,j+1) - P(i,j-1))*dy
        + ( (2.0*V(i,j) - V(i-1,j) - V(i+1,j))*ddx
        + (2.0*V(i,j) - V(i,j-1) - V(i,j+1))*ddy )/Re ) ;
```

21

7.2 u,vの計算の範囲

- 下記のように4個に分けて計算する。

22

7.3 pのSOR法による計算

- 計算概要

-Δp=f(u,v)のから連立方程式Ap=bを作成
k=1,2,...,nx*nyか収束まで以下を反復
    -Δp=bのpをSOR法で計算
    err = $\| r \|_2 / \| b \|_2$
    if(err <= EPS) 収束

23

7.4 pの計算全体

プログラムPSOLを参照

境界の外側のu,vを4.3に従いセット

pの対称境界と固定境界(L_3)に値をセット

-Δp=f(u,v)を離散化してAp=bを作成

SOR法でAp=bの解pを求める

24

8. 計算結果

- 角柱周りの流れ解析を下記のRe数で実施それぞれアニメーションを作成

(1) Re=200：ゆるやかな流れが見られる
(2) Re=400：カルマン渦の発生が見られる
(3) Re=800：激しいカルマン渦が見られる

Web: http://www.aoni.waseda.jp/ushiro/flowanime/flow.htm