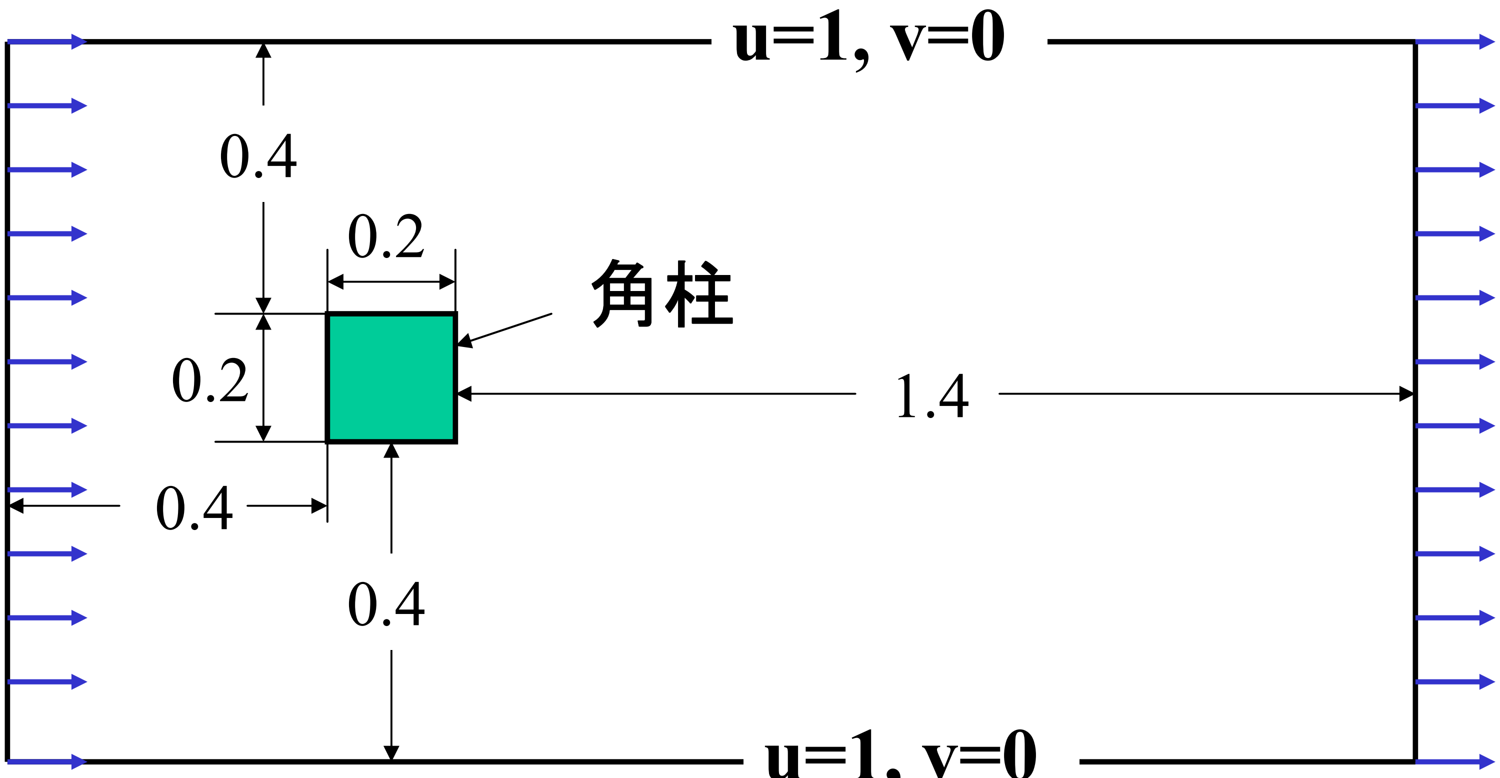
FDM流れ解析　No.6
速度-圧力法で角柱周りの流れ

2007年6月

後　保範 (東京工芸大学)

目次

1. 解析対象



2. 基礎方程式

- ベクトル表示の基礎方程式

$$div(v) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v$$

2. 1 2次元の具体的基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

3. 速度-圧力方程式

- 圧力(p)に関する式の導出

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v$$

の発散(rot)をとり,$D = div(v)$を代入する。

$$-\Delta p = div((v \cdot \nabla) v) + \frac{D^{(n+1)} - D^{(n)}}{\Delta \mathrm{t}} - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta D^{(n)}$$

本来は$D = 0$であり、$D^{(n+1)}$と右辺第3項は無視できる。

$$-\Delta p = div((v \cdot \nabla) v) - \frac{D}{\Delta t}$$

3.1 速度-圧力による方程式

$$-\Delta p = div((v \cdot \nabla)v) - \frac{div(v)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v$$

3.2 2次元速度-圧力の具体的方程式

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)/\Delta t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

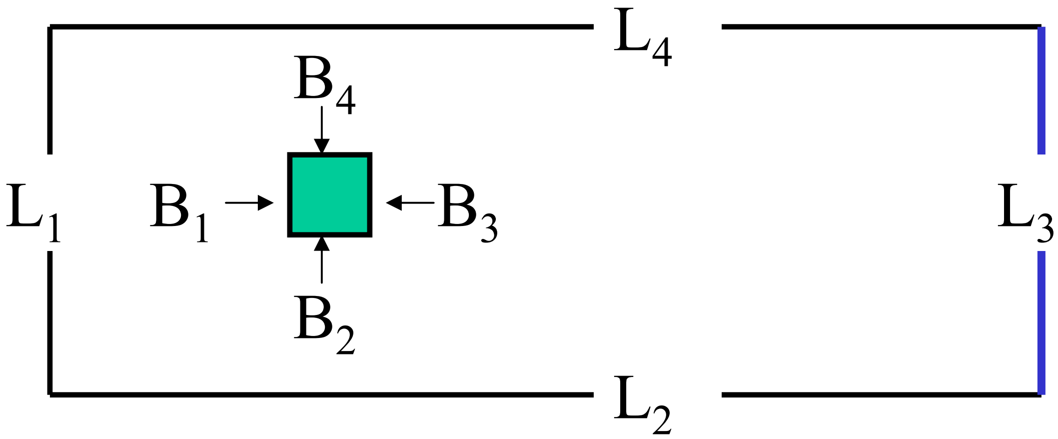
4. 境界条件と初期条件

- u,vの境界条件

$u=1.0,\ v=0.0 \quad on\ L_1,L_2,L_4$

$u=0.0,\ v=0.0 \quad on\ B_1,B_2,B_3,B_4$

$\partial u/\partial x=0.0,\ \partial v/\partial x=0.0 \quad on\ L_3$

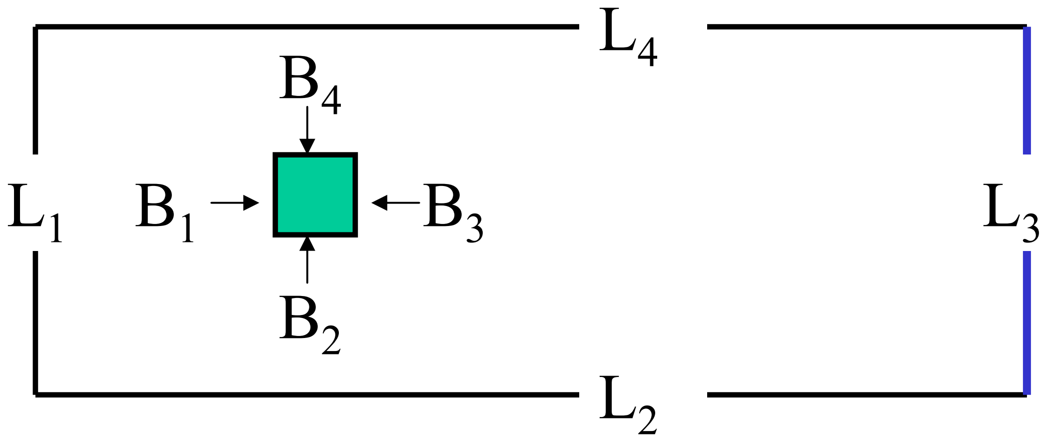


4.1 pの境界条件

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad on \quad L_1, B_1, B_3$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad on \quad L_2, L_4, B_2, B_4$$

$$p = 0 \qquad on \quad L_3$$



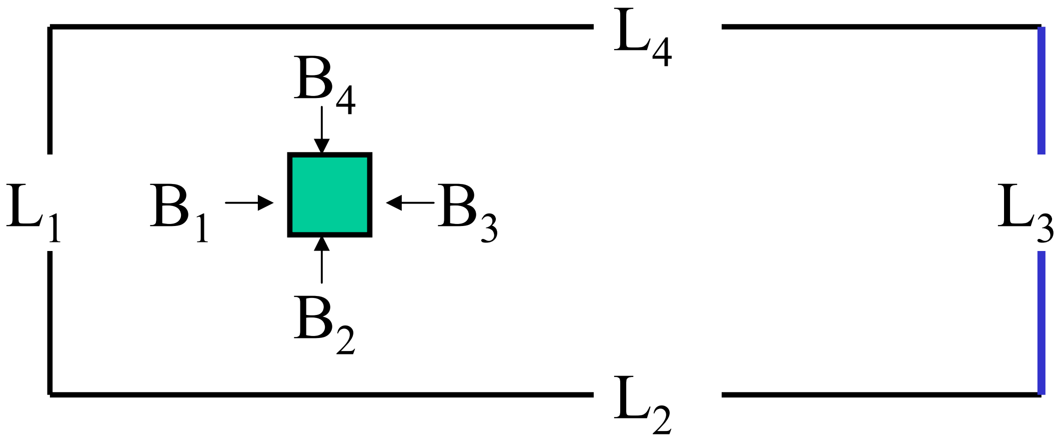
4.2 u,vの初期条件

ポテンシャルフローで 計算

$$-\Delta\phi = 0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = v$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 1.0 \;\; on \;\; L_3, \qquad \phi = x \quad on \;\; L_1, L_2, L_4$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0.0 \;\; on \;\; B_1, B_3, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0.0 \;\; on \;\; B_2, B_4$$



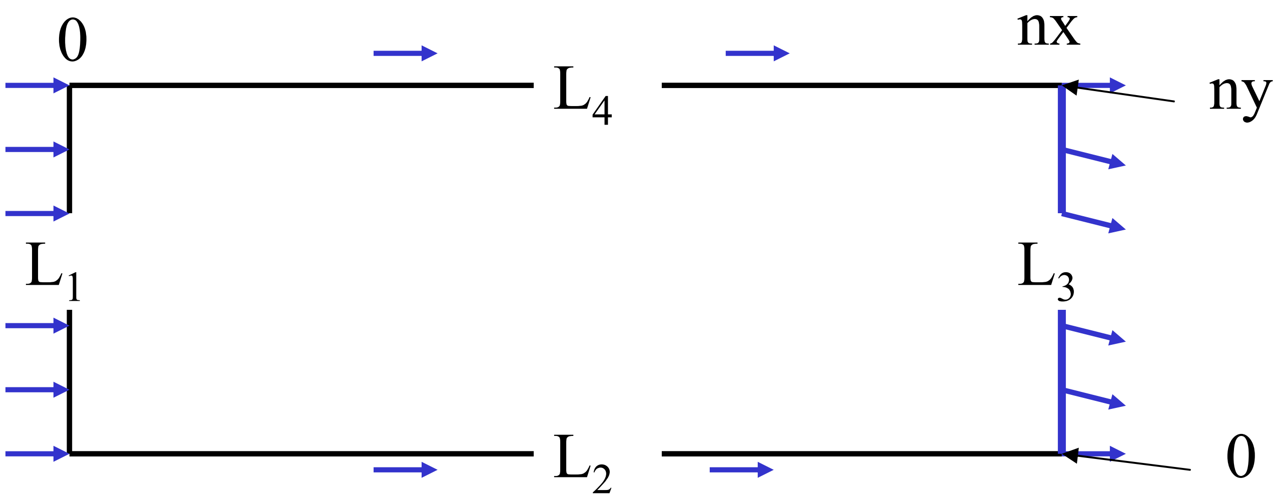
4.3 p計算の外側境界条件(周囲)

$$u_{-1,j} = 1.0, \quad v_{-1,j} = 0.0 \quad on \;\; L_1$$

$$u_{i,-1} = 1.0, \quad v_{i,-1} = 0.0 \quad on \;\; L_2$$

$$u_{nx+1,j} = u_{nx,j}, \quad v_{nx+1,j} = v_{nx,j} \quad on \;\; L_3$$

$$u_{i,ny+1} = 1.0, \quad v_{i,ny+1} = 0.0 \quad on \;\; L_4$$



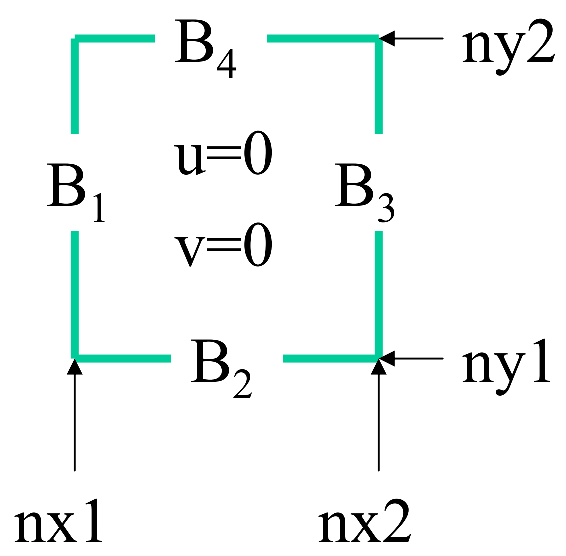
4.4 p計算外側境界条件(角柱)

$$u_{nx1+1,j}=0,\quad v_{nx1+1,j}=0\quad on\ B_1$$

$$u_{i,ny1+1}=0,\quad v_{i,ny1+1}=0\quad on\ B_2$$

$$u_{nx2-1,j}=0,\quad v_{nx2-1,j}=0\quad on\ B_3$$

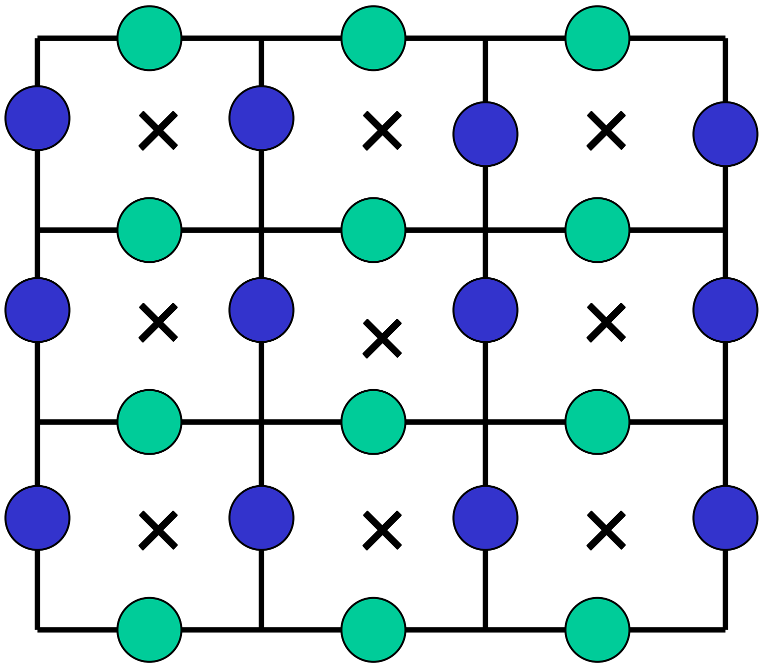
$$u_{i,ny2-1}=0,\quad v_{i,ny2-1}=0\quad on\ B_4$$



5. 差分法による離散化方法

- スタガード格子

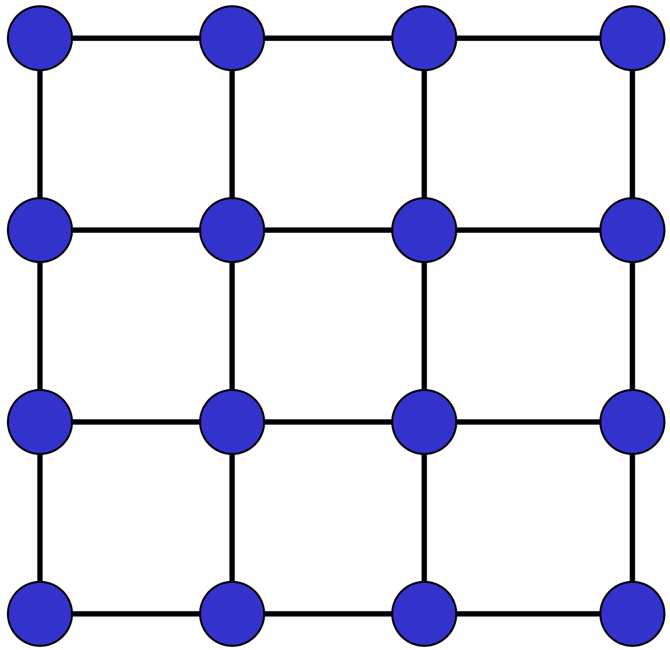
●; u格子
●; v格子
×; p格子



5.1 通常格子による離散化

- 通常格子

; u,v,p格子



5.2　pの離散化(通常格子)

$$\frac{2p_{i,j}-p_{i-1,j}-p_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{2p_{i,j}-p_{i,j-1}-p_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}=$$

$$\frac{(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})^2}{4(\Delta x)^2}+\frac{(v_{i,j+1}-v_{i,j-1})^2}{4(\Delta y)^2}+\frac{(v_{i+1,j}-v_{i-1,j})(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})}{2\Delta x\Delta y}$$

$$-\left[\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\Delta x}+\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j-1}}{2\Delta y}\right]/\Delta t$$

5.3　uの離散化(通常格子)

$$\frac{u_{i,j}^{(k+1)}-u_{i,j}}{\Delta t}=-\frac{u_{i+1,j}^2-u_{i-1,j}^2}{2\Delta x}-\frac{u_{i,j+1}v_{i,j+1}-u_{i,j-1}v_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$-\frac{p_{i+1,j}-p_{i-1,j}}{2\Delta x}-$$

$$\left[\frac{2u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{2u_{i,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right]/\mathrm{Re}$$

5.4 vの離散化(通常格子)

$$\frac{v_{i,j}^{(k+1)} - v_{i,j}}{\Delta t} = -\frac{u_{i+1,j}v_{i+1,j} - u_{i-1,j}v_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j+1}^2 - v_{i,j-1}^2}{2\Delta y}$$

$$-\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} -$$

$$\left[\frac{2v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{2v_{i,j} - v_{i,j-1} - v_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right] / \mathrm{Re}$$

6 プログラム全体計算手順

nx,ny,Re数,Δt, NT(回数),MT(出力間隔)入力

Δx=2.0/nx,Δy=1.0/ny

ポテンシャル流れでu,v(7.を使用)の初期値を計算

k=1,2,・・・,NTまで反復計算

- t = t + Δt
- SOR法でpの計算 (7.3～7.4を使用)
- u,vの計算 (7.1～7.2を使用)
- if(発散(Over変数で判定)) --> 発散として停止
- if(mod(k,MT)==0) --> u,v,pの出力

7. プログラムの主要部分

- u,vの初期条件(ポテンシャルフローで計算)

  プログラムのPHISOL関数を参照

  ϕ 境界条件の設定

  $-\Delta\phi=0$を離散化し$A\phi=b$を作成

  $A\phi=b$の解ϕをSOR法で求める

  $u_{i,j}=(\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j})/2\Delta x$,　$v_{i,j}=(\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1})/2\Delta y$

  u,vの境界上の値をセット

7.1 u,vの計算(通常格子)

- dt=Δt, dx=1/(2Δx), dy=1/(2Δy), ddx=1/(Δx)^2, ddy=1/(Δy)^{2}とする。

```
U(i,j) = U(i,j) - dt*((U(i+1,j)*U(i+1,j) - U(i-1,j)*U(i-1,j))*dx
        + (U(i,j+1)*V(i,j+1) - U(i,j-1)*V(i,j-1))*dy
        + (P(i+1,j) - P(i-1,j))*dx
        + ( (2.0*U(i,j) - U(i-1,j) - U(i+1,j))*ddx
        + (2.0*U(i,j) - U(i,j-1) - U(i,j+1))*ddy )/Re ) ;
V(i,j) = V(i,j) - dt*((V(i,j+1)*V(i,j+1) - V(i,j-1)*V(i,j-1))*dy
        + (U(i+1,j)*V(i+1,j) - U(i-1,j)*V(i-1,j))*dx
        + (P(i,j+1) - P(i,j-1))*dy
        + ( (2.0*V(i,j) - V(i-1,j) - V(i+1,j))*ddx
        + (2.0*V(i,j) - V(i,j-1) - V(i,j+1))*ddy )/Re ) ;
```

7.2　u,vの計算の範囲

- 下記のように4個に分けて計算する。

7.3 pのSOR法による計算

- 計算概要

-Δp=f(u,v)のから連立方程式Ap=bを作成

k=1,2,...,nx*nyか収束まで以下を反復

-Δp=bのpをSOR法で計算

$err = \| r \|_2 / \| b \|_2$

if(err <= EPS) 収束

7.4 pの計算全体

プログラムPSOLを参照

境界の外側のu,vを4.3に従いセット

pの対称境界と固定境界(L_3)に値をセット

$-\Delta p=f(u,v)$を離散化して$Ap=b$を作成

SOR法で$Ap=b$の解pを求める

8. 計算結果

- 角柱周りの流れ解析を下記のRe数で実施それぞれアニメーションを作成

(1) Re=200：ゆるやかな流れが見られる

(2) Re=400：カルマン渦の発生が見られる

(3) Re=800：激しいカルマン渦が見られる

Web: http://www.aoni.waseda.jp/ushiro/flowanime/flow.htm