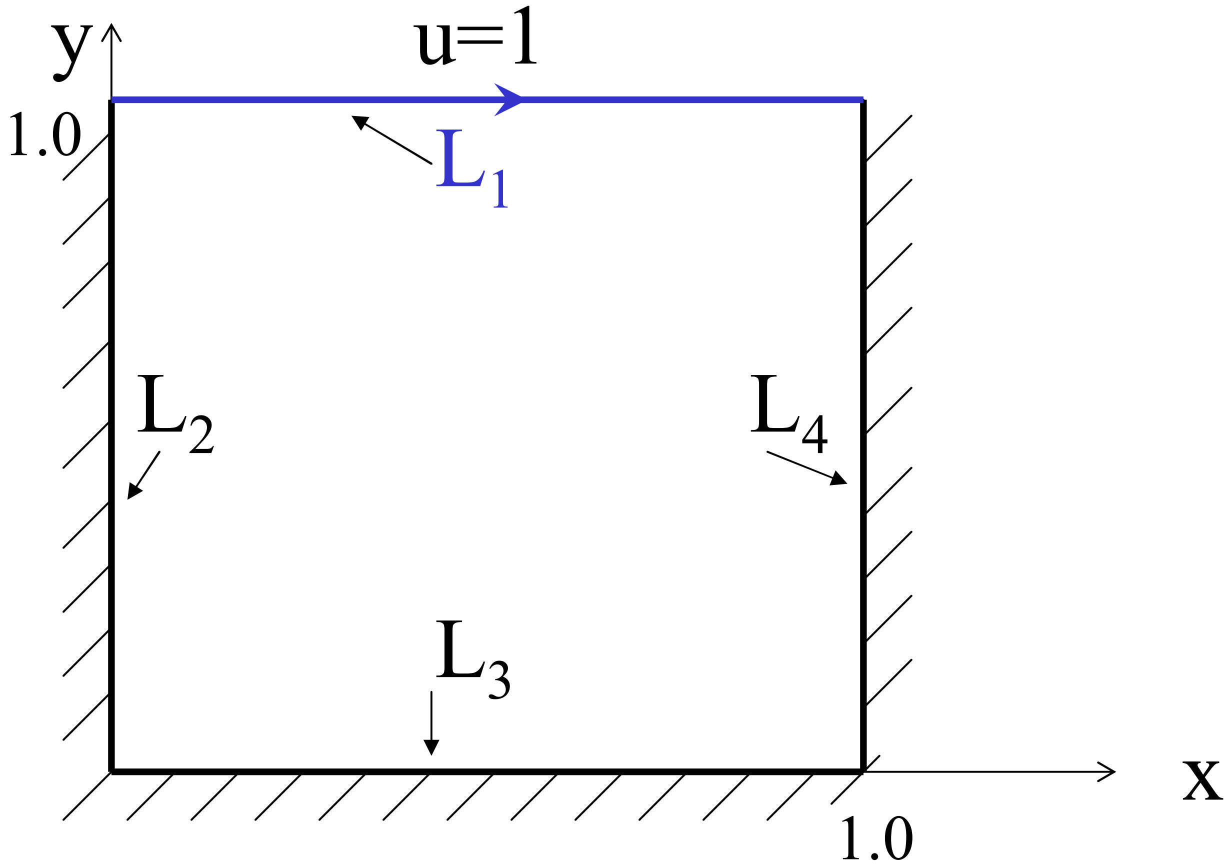
FDM流れ解析　No.4
流れ関数-渦度法でキャビティ流れ

2007年6月

後　保範 (東京工芸大学)

目次

1. 解析対象



2. 基礎方程式

- ベクトル表示の基礎方程式

$$div(v) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v$$

2. 1 2次元の具体的基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

3. 流れ関数-渦度方程式

- 下記の様に流れ関数(ϕ)と渦度(ω)を定義する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -v, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = u$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

3.1 流れ関数-渦度による方程式

$$-\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)=\omega$$

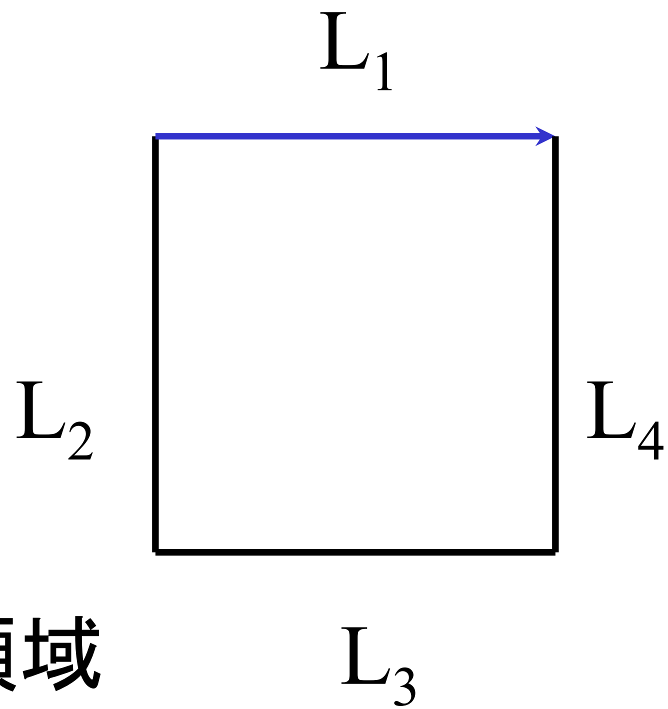
$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=-\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)$$

4. 境界条件と初期条件

- u,vの境界条件

$u=1,\ v=0$ on L_1

$u=v=0$ on L_2, L_3, L_4



- 初期条件； $u=v=0$ in 領域

4. 1 ϕ, ω 境界条件と初期条件

- ϕ の境界条件

$$\phi = 0 \quad on \ L_1, L_2, L_3, L_4$$

- ω の境界条件

$$\omega = -(2\phi_p + 2h)/h^2 \quad on \ L_1$$ ϕ_pは境界の一つ内側の値

$$\omega = -2\phi_p / h^2 \quad on \ L_2, L_3, L_4$$ $\mathrm{h} = \Delta x = \Delta y$

- 初期条件

$\phi = \omega = 0 \quad in$ 領域

5. 差分法による離散化方法

- ϕ の差分法による離散化

$$-\frac{(\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j})-(\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j})}{(\Delta x)^2}-\frac{(\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j})-(\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1})}{(\Delta y)^2}=\omega_{i,j}$$

ここで、$\Delta x=\Delta y=h$と置くと次式をえる。

$$-\phi_{i,j-1}-\phi_{i-1,j}+4\phi_{i,j}-\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j+1}=h^2\omega_{i,j}$$

5.1 ω の差分法による離散化

$$\frac{\omega_{i,j}^{(k+1)}-\omega_{i,j}}{\Delta t}=-\frac{(\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j})}{4\Delta x\Delta y}+\frac{(\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})}{4\Delta x\Delta y}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{(\omega_{i+1,j}-\omega_{i,j})+(\omega_{i,j}-\omega_{i-1,j})}{(\Delta x)^2}+\frac{(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j})+(\omega_{i,j}-\omega_{i,j-1})}{(\Delta y)^2}\right)$$

$\Delta x=\Delta y=h$を代入して整理すると下記の式を得る。

$$\omega_{i,j}^{(k+1)}=\omega_{i,j}+\frac{\Delta t}{h^2}[-(\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j}-\omega_{i-1,j})/4+(\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j-1})/4$$
$$+\frac{\omega_{i,j-1}+\omega_{i-1,j}-4\omega_{i,j}+\omega_{i+1,j}+\omega_{i,j+1}}{\mathrm{Re}}]$$

ここで、$\omega_{i,j}^{(k+1)}$が求めるものであり、$\omega_{i,j}=\omega_{i,j}^{(k)},\phi_{i,j}=\phi_{i,j}^{(k)}$である。

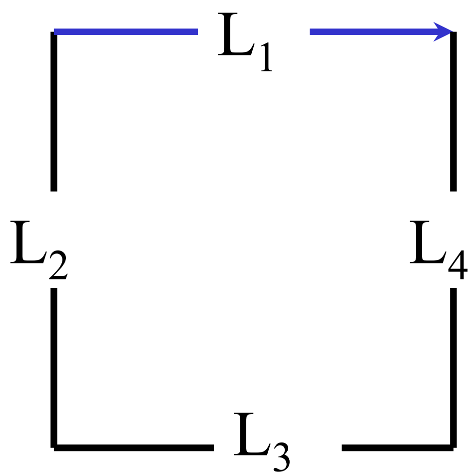
5.2 ω の境界上の離散化

$$\omega_{i,ny} = -(2\phi_{i,ny-1} + 2h)/h^2 \quad on\ L_1$$

$$\omega_{0,j} = -2\phi_{1,j}/h^2 \quad on\ L_2$$

$$\omega_{i,0} = -2\phi_{i,1}/h^2 \quad on\ L_3$$

$$\omega_{nx,j} = -2\phi_{nx-1,j}/h^2 \quad on\ L_4$$



xの分割数をnx

yの分割数をnyとする

6. 計算手順

- ω,ϕ の計算

$k = 0,1,2\cdots$ と指定回数まで計算

$\mathrm{t} = \mathrm{t} + \Delta \mathrm{t}$

$\omega^{(k+1)}$ の境界値の設定 ($\phi^{(k)}$ を使用)

$\omega^{(k+1)}$ の内点の計算 ($\phi^{(k)},\omega^{(k)}$ を使用)

$\phi^{(k+1)}$ の内点を反復法で計算 ($\omega^{(k+1)}$ を使用)

6. 1 全体計算手順

分割数(nx), Re数, Δt, 積分回数$(nt, mt$(出力))を入力

$ny = nx, \quad h = 1.0 / nx$

$\omega = \phi = 0$ (初期条件のセット)

$k = 1,2,\cdots,n$

ωの境界条件のセット

ω, ϕの内点の計算

$if\ (\mathrm{mod}(k, mt) = 0)\ \ then\ \ u, v$を計算 ϕ, u, vをして出力

6. 2 出力のためのu,vの計算

- $u = \partial\phi / \partial y, v = -\partial\phi / \partial x$と境界条件で計算

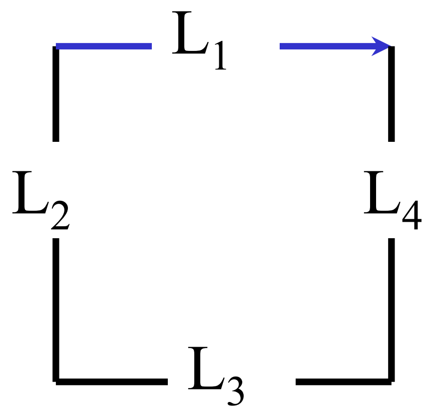
$$u_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y}, \quad v_{i,j} = \frac{\phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j}}{2\Delta x} \quad in \text{ 内点}$$

$$u_{i,ny} = 1,\ v_{i,ny} = 0 \quad on\ L_1$$

$$u_{0,j} = 0,\ v_{0,j} = 0 \quad on\ L_2$$

$$u_{i,0} = 0,\ v_{i,0} = 0 \quad on\ L_3$$

$$u_{nx,j} = 0,\ v_{nx,j} = 0 \quad on\ L_4$$



7. プログラム主要部分

- ωの境界条件の設定 (H=h, D2=1.0/h^2)

```
for (i=0; i<=nx; i++)
   { OMG[i][0]   =  -2.0*PHI[i][1]*D2 ; }
     OMG[i][ny] = -2.0*(PHI[i][ny-1]+H)*D2 ; }
for (j=1; j<ny; j++)
   { OMG[0][j]   =  -2.0*PHI[1][j]*D2 ;
     OMG[nx][j] =  -2.0*PHI[nx-1][j]*D2 ;  }
```

7.1 ωの計算

DT=Δt , D2=1.0/h^2とする。

```
for (i=1; i<nx; i++) {
  for (j=1; j<ny; j++) {
    OMG[i][j] = OMG[i][j]+ DT*D2*(
      + ( ( -(PHI[i][j+1] - PHI[i][j-1])*(OMG[i+1][j] - OMG[i-1][j]) +
            (PHI[i+1][j] - PHI[i-1][j])*(OMG[i][j+1] - OMG[i][j-1]) )/4.0
      + ( OMG[i][j-1] + OMG[i-1][j] - 4.0*OMG[i][j] + OMG[i+1][j]
          + OMG[i][j+1] ) ) / Re ) ;   }
  }
```

7.2 ϕ のSOR法による計算

SORの加速係数をAlp, H2=h^2とする。

k=1,2,…と収束まで反復

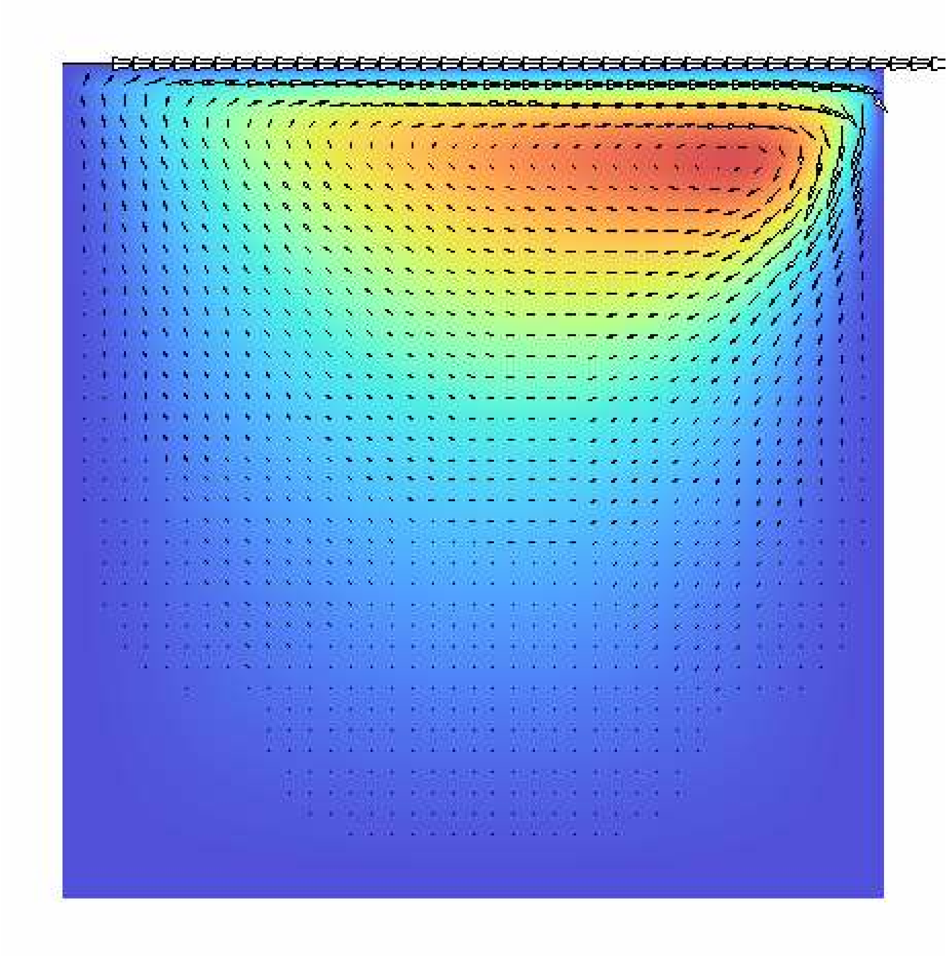
```
for (i=1; i<nx; i++) {
  for (j=1; j<ny; j++) {
    R = (H2*OMG[i][j] + PHI[i][j-1] + PHI[i-1][j] ;
      + PHI[i+1][j] + PHI[i][j+1] )/4.0 - PHI[i][j] ;
    PHI[i][j] = PHI[i][j] + Alp*R ;  } }
```

7.3　出力のためu,vの計算

- xv=0.5/Δx, yv=0.5/Δyとする。

```
for (i=1; i<nx; i++) {
    for (j=1; j<ny; j++) {
        U[i][j] = (PHI[i][j+1] - PHI[i][j-1])*yv ;
        V[i][j] = -(PHI[i+1][j] - PHI[i-1][j])*xv ; } }
for (i=0; i<=nx; i++) {
    U[i][ny]=1.0;  V[i][ny]=0.0;  U[i][0]=0.0; V[i][0]=0.0 ; }
for (j=1; j<ny; j++) {
    U[0][j]=0.0;  V[0][j]=0.0; U[nx][j]=0.0; V[nx][j] = 0.0 ; }
```

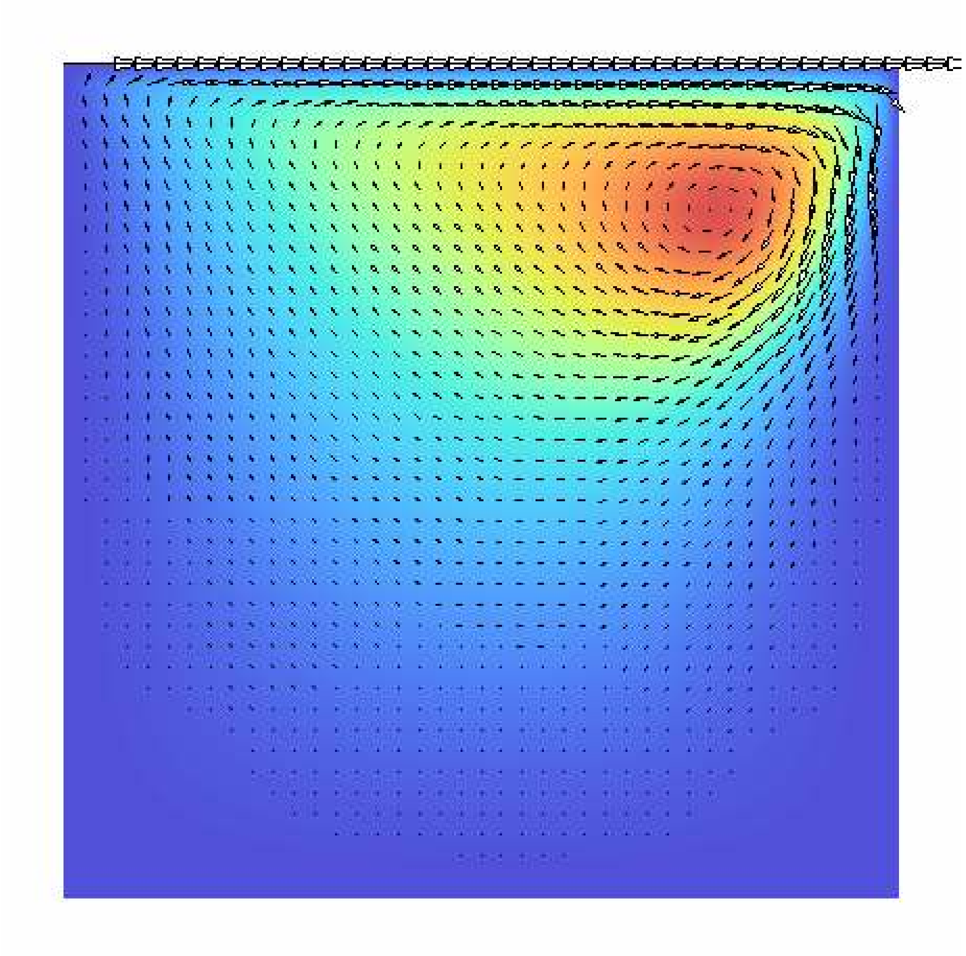
8. 計算結果 (Re=400, t=1.0)



40×40分割

Δt=0.01

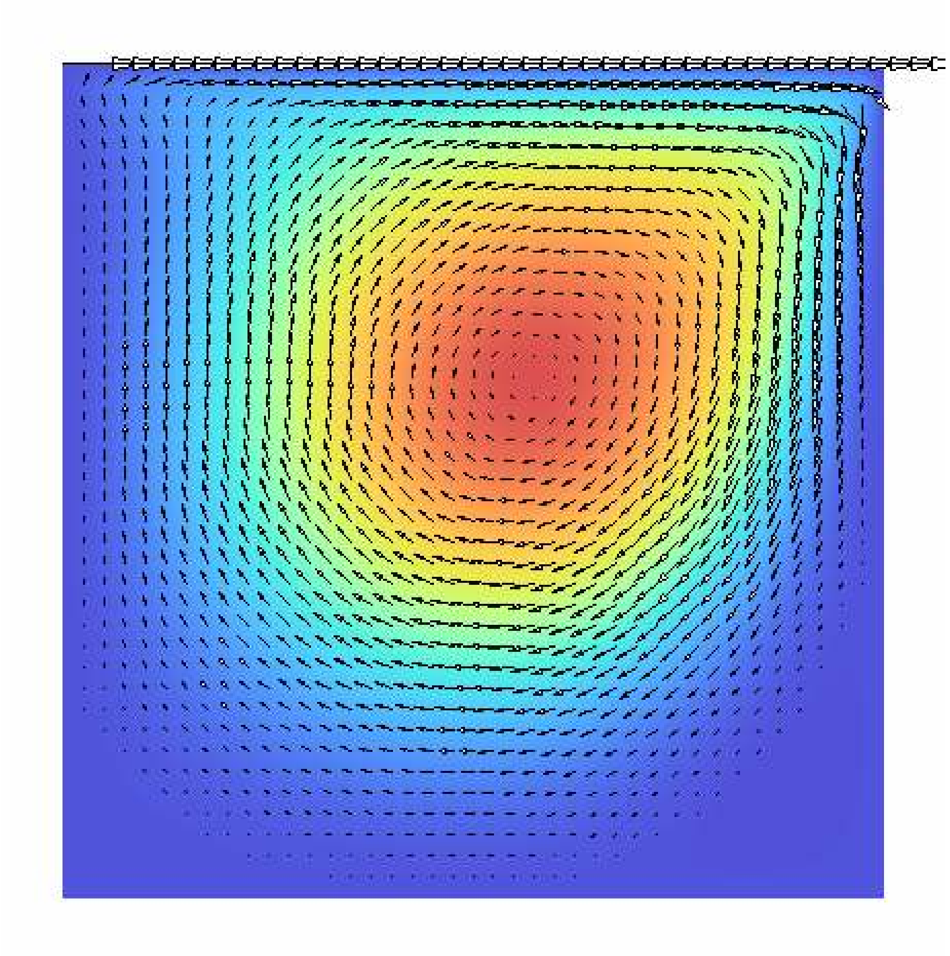
8.1 計算結果 (Re=400, t=2.0)



40×40分割

Δt=0.01

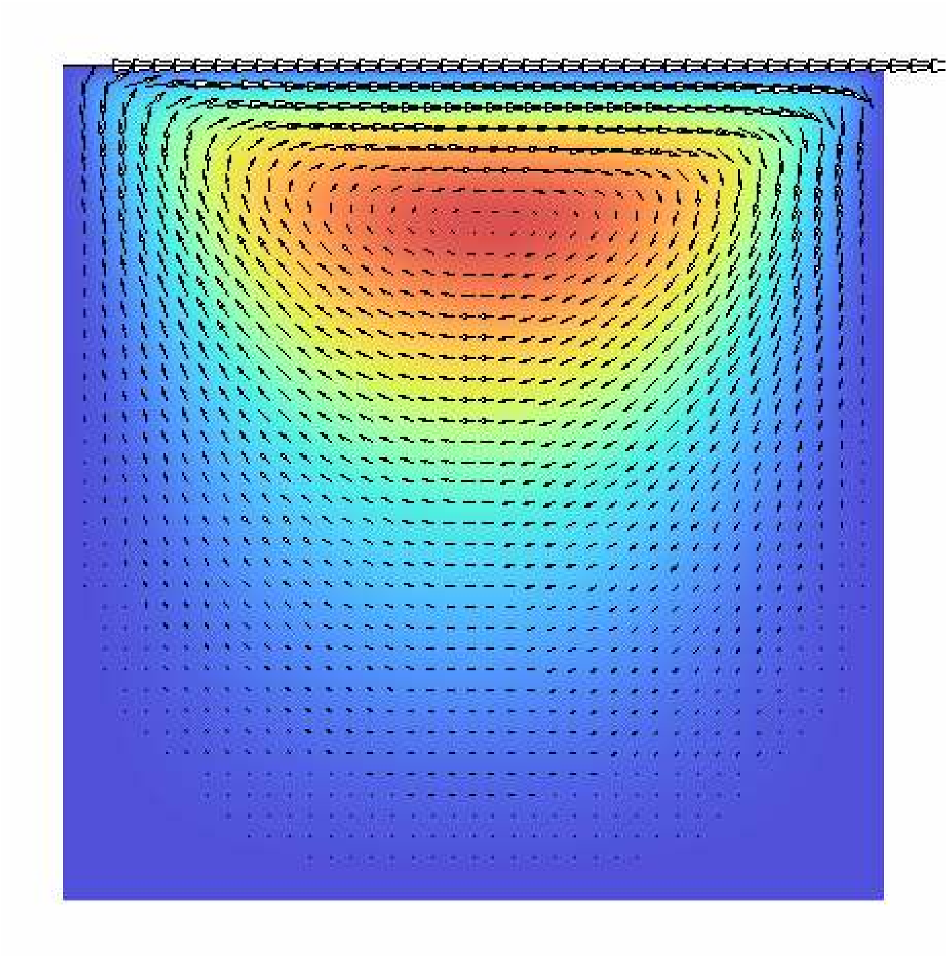
8.2 計算結果 (Re=400, t=20.0)



40×40分割

Δt=0.01

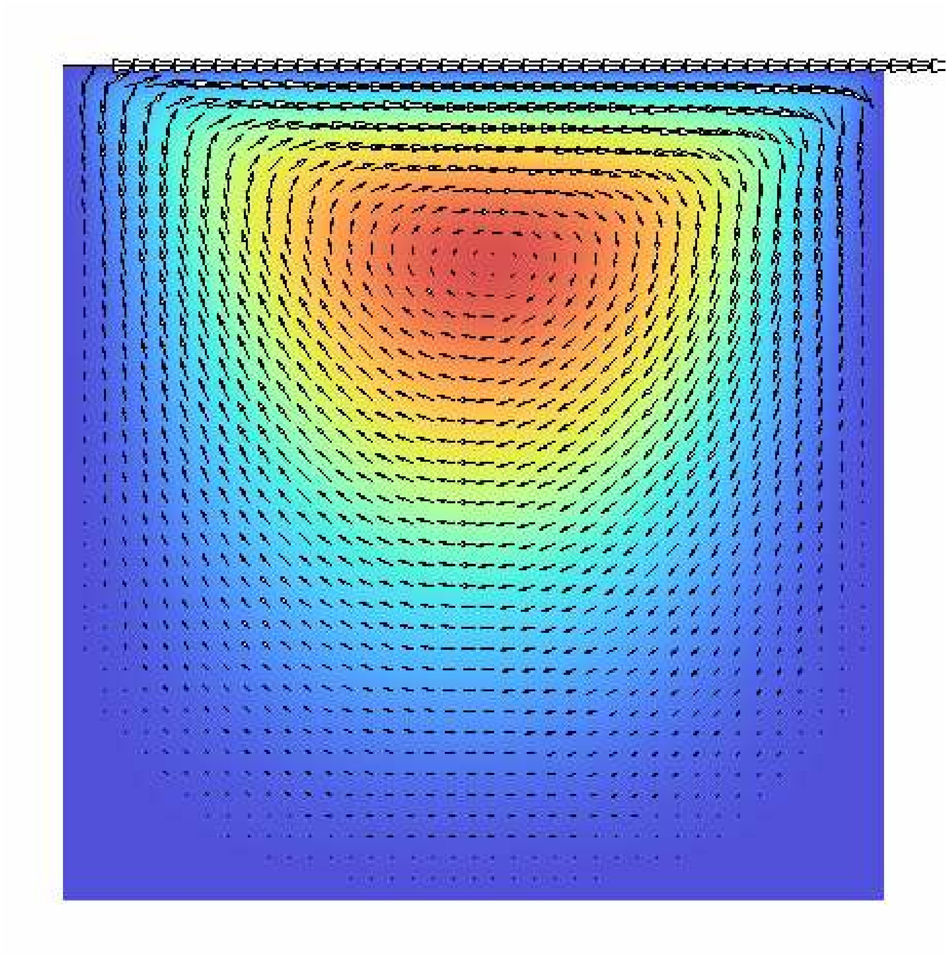
8.3 計算結果 (Re=10, t=0.1)



40×40分割

Δt=0.001

8.4 計算結果 (Re=10, t=1.0)



40×40分割

Δt=0.001