

FDM流れ解析 No.3  
CG法で結果の対称性を保つ工夫

2007年6月

後 保範 (東京工芸大学)

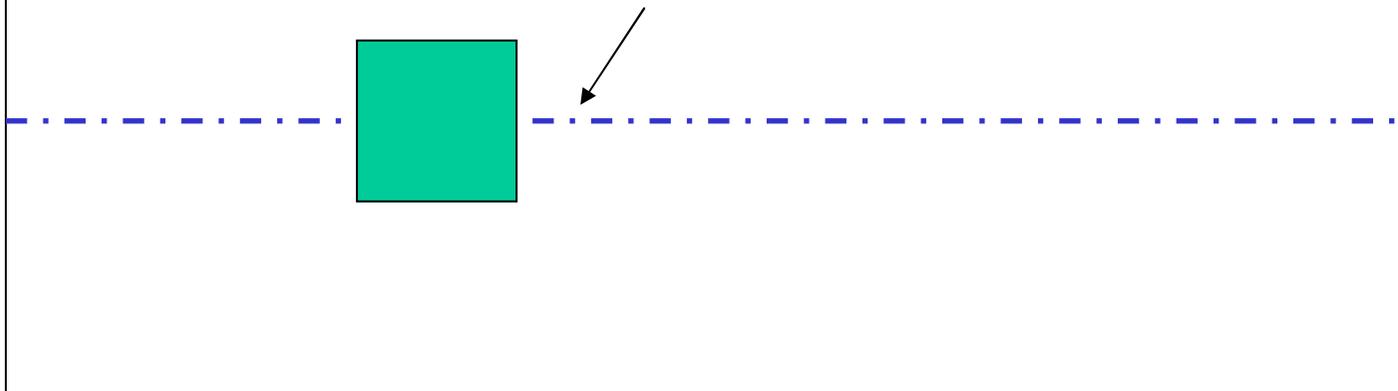
# 目次

1. 結果の対称性とは
2. 対称性が崩れる項
3. 浮動小数点演算の丸め誤差
4. 対称性が崩れる原因
5. 丸め誤差を同一にする工夫
6. CG法での計算結果

# 1. 結果の対称性とは

- 「下記の様な角柱周りの流れ解析で、初期条件、境界条件がy軸の中心で対称なら流れも対称になるか？」が最終目標

本中心線を境に対称な流れになるか？



# 1.1 CG法の解の対称性

流れ解析の圧力方程式

$$\Delta p = -\text{div}(v \cdot \nabla)v + \text{div}(v) / \Delta t$$

⇓ 差分法で離散化

$Ax = b$  ;  $A, b$ とも領域の  $y$  軸で対称

⇓ CG法で解  $x$  を計算

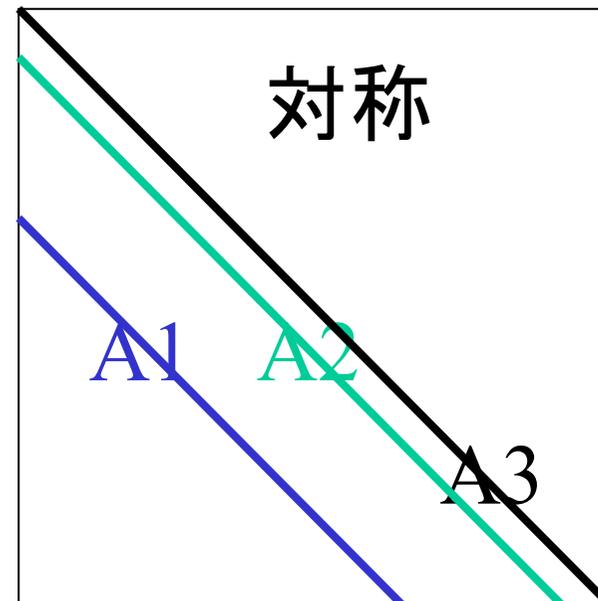
圧力解 ( $x$ ) は  $y$  軸で対称にできるか ?

## 2. 対称性が崩れる項

- CG法は数学的には場の対称性を保つが、丸め誤差のため下記計算で対称性が崩壊

$q=Ap$ の計算

$$\begin{aligned}q(i,j) = & A1(i,j)*p(i,j-1) \\ & + A2(i,j)*p(i-1,j) \\ & + A3(i,j)*p(i,j) \\ & + A2(i+1,j)*p(i+1,j) \\ & + A1(i,j+1)*p(i,j+1)\end{aligned}$$



## 2.1 CG法プログラム

反復計算で  $Ax = b$  の解  $x$  を求める.

$$p = r = b - Ax, \quad x \text{ は初期値}$$

$$\lambda_0 = (r, r)$$

以下  $\|r\|_2 \leq \varepsilon$  (収束条件) となるまで反復する.

$$q = Ap, \quad \alpha = \lambda_0 / (p, q)$$

$$x = x + \alpha p, \quad r = r - \alpha q$$

$$\lambda_1 = (r, r), \quad \beta = \lambda_1 / \lambda_0$$

$$p = r + \beta p, \quad \lambda_0 = \lambda_1$$

### 3. 浮動小数点演算の丸め誤差

- 計算機で使用する浮動小数点(Cでは `float, double` で指示)演算では下記の計算順序の変更で結果が異なる場合がある。

実数(無限桁数)

$$(x_1 + x_2) + x_3 = (x_3 + x_2) + x_1$$

浮動小数点(有限桁数)

$$(x_1 + x_2) + x_3 \neq (x_3 + x_2) + x_1$$

## 3.1 結果が異なる例

- 10進3桁で四捨五入丸め方式の例を示す

$$x_1 = 21.5, \quad x_2 = 1.24, \quad x_3 = 0.236$$

(1)  $(x_1 + x_2) + x_3$  の計算

$$x_1 + x_2 = 21.5 + 1.24 = 22.7 \leftarrow 22.74$$

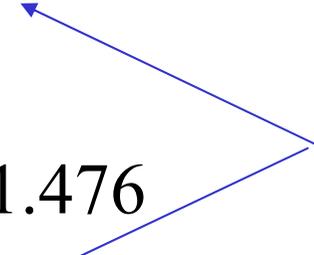
$$(x_1 + x_2) + x_3 = 22.7 + 0.236 = 22.9 \leftarrow 22.936$$

(2)  $(x_3 + x_2) + x_1$  の計算

$$x_3 + x_2 = 0.236 + 1.24 = 1.48 \leftarrow 1.476$$

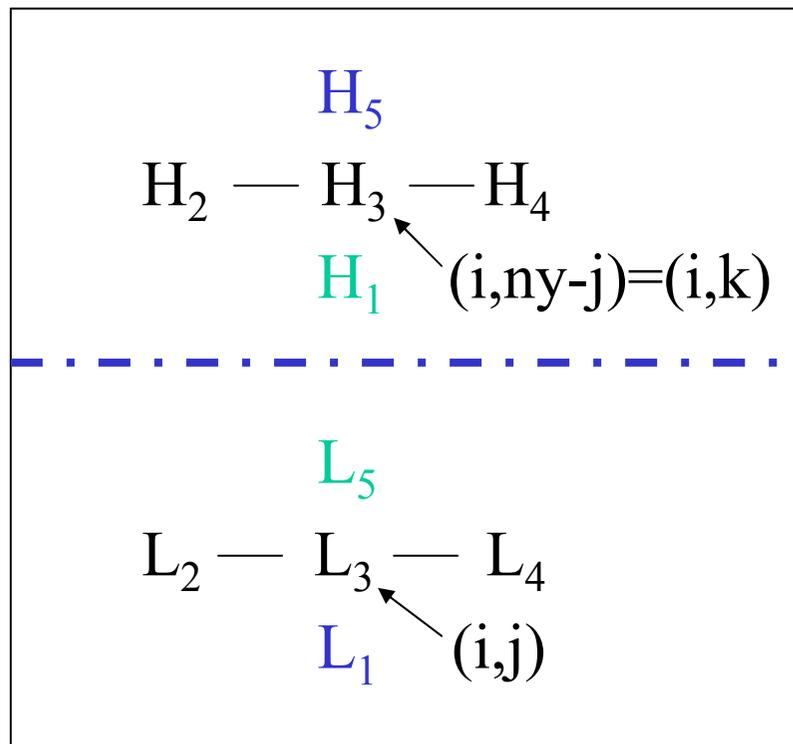
$$(x_3 + x_2) + x_1 = 1.48 + 21.5 = 23.0 \leftarrow 22.98$$

不一致



## 4. 対称性が崩れる原因

- 係数行列Aとベクトルpは場の対称性のため下記の対応関係がある。



格子 $L_3$ と $H_3$ のq計算  
するAとpの等号関係

$H_1$  格子 =  $L_5$  格子

$H_2$  格子 =  $L_2$  格子

$H_3$  格子 =  $L_3$  格子

$H_4$  格子 =  $L_4$  格子

$H_5$  格子 =  $L_1$  格子

## 4.1 係数行列の等号関係

- $H_1$  格子と  $L_5$  格子 : (  $k = n_y - j$  )  
 $A1(i,k) = A1(i,j+1)$  ,       $p(i,k-1) = p(i,j+1)$
- $H_2$  格子と  $L_2$  格子  
 $A2(i,k) = A2(i,j)$  ,       $p(i-1,k) = p(i-1,j)$
- $H_3$  格子と  $L_3$  格子  
 $A3(i,k) = A3(i,k)$  ,       $p(i,k) = p(i,j)$
- $H_4$  格子と  $L_4$  格子  
 $A2(i+1,k) = A2(i+1,j)$  ,       $p(i+1,k) = p(i+1,j)$
- $H_5$  格子と  $L_1$  格子  
 $A1(i,k+1) = A1(i,j)$  ,       $p(i,k+1) = p(i,j-1)$

## 4.2 数学的に等価な計算

- $L_3$  格子  $(i,j)$  点と  $H_3$  格子  $(i,ny-j)=(i,k)$  点では下記の計算は数学的に同じである。

- $L_3$  格子  $(i,j)$  点

$$q(i,j) = A1(i,j)*p(i,j-1) + A2(i,j)*p(i+1,j) + A3(i,j)*p(i,j) \\ + A2(i+1,j)*p(i,j+1) + A1(i,j+1)*p(i,j+1)$$

- $H_3$  格子  $(i,k)$  点

$$q(i,k) = A1(i,k)*p(i,k-1) + A2(i,k)*p(i+1,k) + A3(i,k)*p(i,k) \\ + A2(i+1,k)*p(i,k+1) + A1(i,k+1)*p(i,k+1)$$

## 4.3 $q(i,j)=q(i,k)$ が成立しない原因

- 下記の $q(i,j)$ と $q(i,k)$ は数学的に同じであるが、丸め誤差のため値が異なる場合がある。

- $L_3$ 格子 $(i,j)$ 点

$$q(i,j) = A1(i,j)*p(i,j-1) + A2(i,j)*p(i+1,j) + A3(i,j)*p(i,j) \\ + A2(i+1,j)*p(i,j+1) + A1(i,j+1)*p(i,j+1)$$

- $H_3$ 格子 $(i,k)$ 点

$$q(i,k) = A1(i,k)*p(i,k-1) + A2(i,k)*p(i+1,k) + A3(i,k)*p(i,k) \\ + A2(i+1,k)*p(i,k+1) + A1(i,k+1)*p(i,k+1)$$

## 5. 丸め誤差を同一にする工夫

- 2項の加減算の丸め誤差は計算順序に依存しないことを利用。()を付けて計算順序を固定

- $L_3$  格子(i,j)点

$$q(i,j) = (A3(i,j)*p(i,j) + ( A1(i,j)*p(i,j-1) + A1(i,j+1)*p(i,j+1) ) ) \\ + (A2(i,j)*p(i+1,j) + A2(i+1,j)*p(i,j+1) )$$

- $H_3$  格子(i,k)点 ( $L_3$  格子と同一になる)

$$q(i,k) = (A3(i,k)*p(i,k) + (A1(i,k)*p(i,k-1)+A1(i,k+1)*p(i,k+1) ) ) \\ + (A2(i,k)*p(i+1,k) + A2(i+1,k)*p(i,k+1) )$$

## 5.1 ループを含め同一にする工夫

- 下記の様に()を付けて対応するものをペアーとし、計算順序を固定する。

```
do j=1,ny- 1
```

```
do i=1,nx-1
```

```
q(i,j) = (A3(i,j)*p(i,j)  
          + (A1(i,j)*p(i,j-1) + A1(i,j+1)*p(i,j+1) )  
          + (A2(i,j)*p(i-1,j) + A2(i+1,j)*p(i+1,j) )
```

## 6. CG法での計算結果

- 2次元CG法 (対称性保持工夫版)

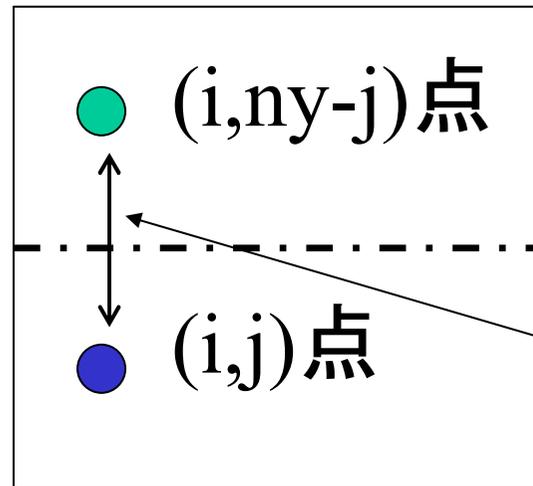
Un-symmetric solution points = 0

$$k=1.0, f=100.0$$

$$-\text{div}(k.\text{grad}(u)) = f$$

10 × 10分割で比較

解が一致するか？



## 6.1 CG法での計算結果(未工夫)

- 2次元CG法 (対称性保持の工夫なし)

Un-symmetric solution points = 7

i	j	X(i,j)	X(i,NY-j)
1	1	3FF4803EBC75E90E	3FF4803EBC75E90D
2	1	4000803EBC75E90E	4000803EBC75E90F
4	1	40066648496100C4	40066648496100C5
1	2	4000803EBC75E90E	4000803EBC75E90F
3	2	40112F66F7F2AB28	40112F66F7F2AB29
4	2	40131BE1958B67EC	40131BE1958B67ED
4	3	4018533208EF2E81	4018533208EF2E82