FDM流れ解析　No.1
流体解析用反復解法と研究の概要

2007年6月

後　保範 (東京工芸大学)

目次

1. 概要と目的

研究目的

(1) 角柱周りの流れ解析で、対称性を保った解析では非対称性(カルマン渦)が発生するか、しないかを確認する。

物理的見地 ---> カルマン渦は発生する

数学的見地 ---> カルマン渦は発生しない

丸め誤差によりカルマン渦(非対称現象)の発生確認できれば大きな成果である。

(2) 上記でFDMによる流れ解析の修得

1.1 研究の動機

- Clay Mathematics Instituteが未解決の問題で解決者に100万ドルを与えるナビエストークス方程式の連続性の問題の簡単なサブセットとなるため
- 本来の問題は「連続な条件を与えると必ず連続の解が存在するか？」
- ここでは、FDM解析で対称な条件と解法を用いれば必ず対称な解となるか？

1.2 研究概要

- ナビエストークス方程式を差分法(FDM)で数値シミュレーションする
- 通常の計算方法ではカルマン渦が発生する角柱回りの流れ解析を行う
- 圧力方程式の計算には共役勾配法(CG法)を使用する
- CG法は計算解が対称になる工夫をする
- 非対称現象が発生したら原因を解明する

2. 研究対象

- 2次元角柱周りの流れ解析に取り組み、最終的には3次元角柱周りにチャレンジ
- 速度-圧力法とFDMを使用しナビエストークス方程式を離散化する
- 連立一次方程式の計算は対称性を保つ工夫をしたCG法を使用
- 中心差分法及び風上差分法で通常格子を使用し、非定常解析をする

3. 流れ解析用反復解法

- 下記の圧力方程式の計算に利用する

$$\Delta p = -div(v \cdot \nabla)v + div(v) / \Delta t$$

- 説明する反復解法

(1) Gauss-Seidel法とSOR法(逐次過剰緩和法)

(2) CG法(Conjugate Gradients, 共役勾配法)

(3) PCG法(Preconditiond CG,前処理付共役勾配法)

4. 反復解法での結果の対称性

- SOR法
  数学的にも結果の対称性が保たれない
- CG法 (今回使用--対称性確保のため)
  数学的対称性はあるが、丸め誤差まで含めた対称性を保つ工夫が必要
- PCG法
  不完全三角分解による前処理は数学的対称性が保たれない

4.1 CG法の計算手順

Ax=bの解xをCG法で計算する

初期値 xを与える

$$p = r = b - Ax\,, \quad \lambda_0 = (r, r)$$

以下収束するまで反復　　　計算

$$q = Ap\,, \qquad \alpha = \lambda_0 / (p, q)$$

$$x = x + \alpha p\,, \quad r = r - \alpha q$$

$$\lambda_1 = (r, r), \quad \beta = \lambda_1 / \lambda_0$$

$$p = r + \beta p\,, \quad \lambda_0 = \lambda_1$$

4.2 CG法の対称性

- CG法は数学的な対称性をもち工夫により、丸め誤差も含めた対称性が保てる
- 丸め誤差を含めた対称性を保つ工夫

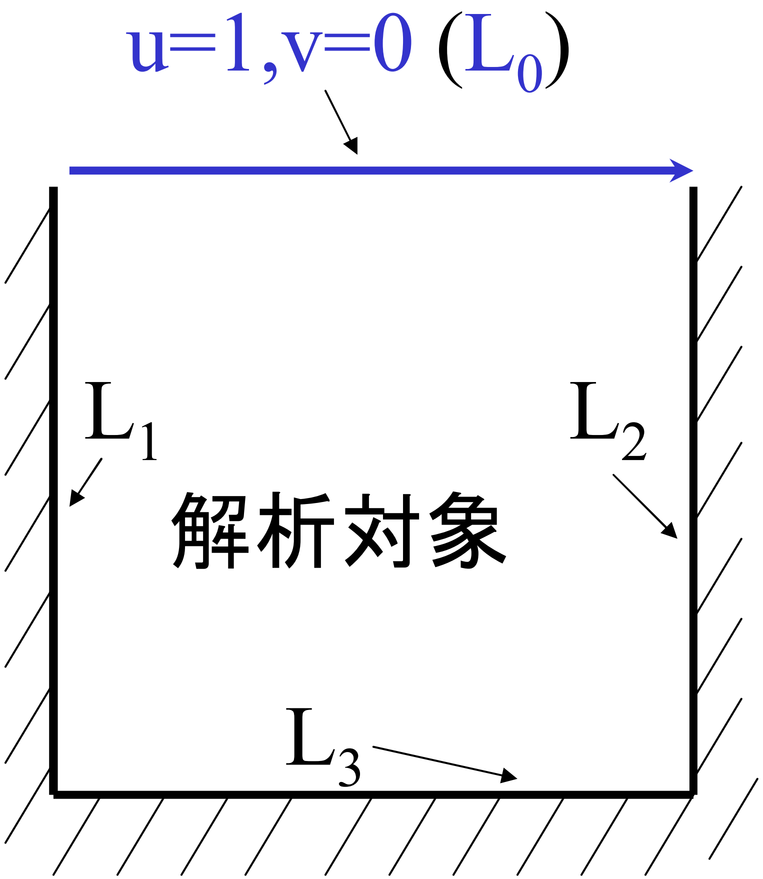
CG法の計算手順で丸め誤差により

対称性が壊れるのは下記の計算

---> この計算の対称性を保つ工夫要

$r = b - Ax$, $q = Ap$

5. 流れ関数-渦度法でキャビティ流れ



u,vでの境界条件

$u=1, v=0$ on L_0

$u=v=0$ on L_1, L_2, L_3

ϕ (流れ関数)境界条件

$$\phi = 0 \quad on\ L_0, L_1, L_2, L_3$$

ω (渦度)境界条件

$$\omega = -(2\phi_p + 2h)/h^2 \quad on\ L_0$$

$$\omega = -2\phi_p / h^2 \quad on\ L_1, L_2, L_3$$

5.1 定常キャビティ流れ

- 支配方程式

$$\Delta \phi = -\omega$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \omega - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

u, vとϕの関係

$$\partial \phi / \partial x = -v, \quad \partial \phi / \partial y = u$$

5.2 非定常キャビティ流れ

- 支配方程式

$$\Delta \phi = -\omega$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \omega - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

- 初期条件

$$\phi = 0,\ \ \omega = 0 \quad in \text{ 境界以外の領域}$$

6. 速度-圧力法でキャビティ流れ

- 計算領域と境界条件

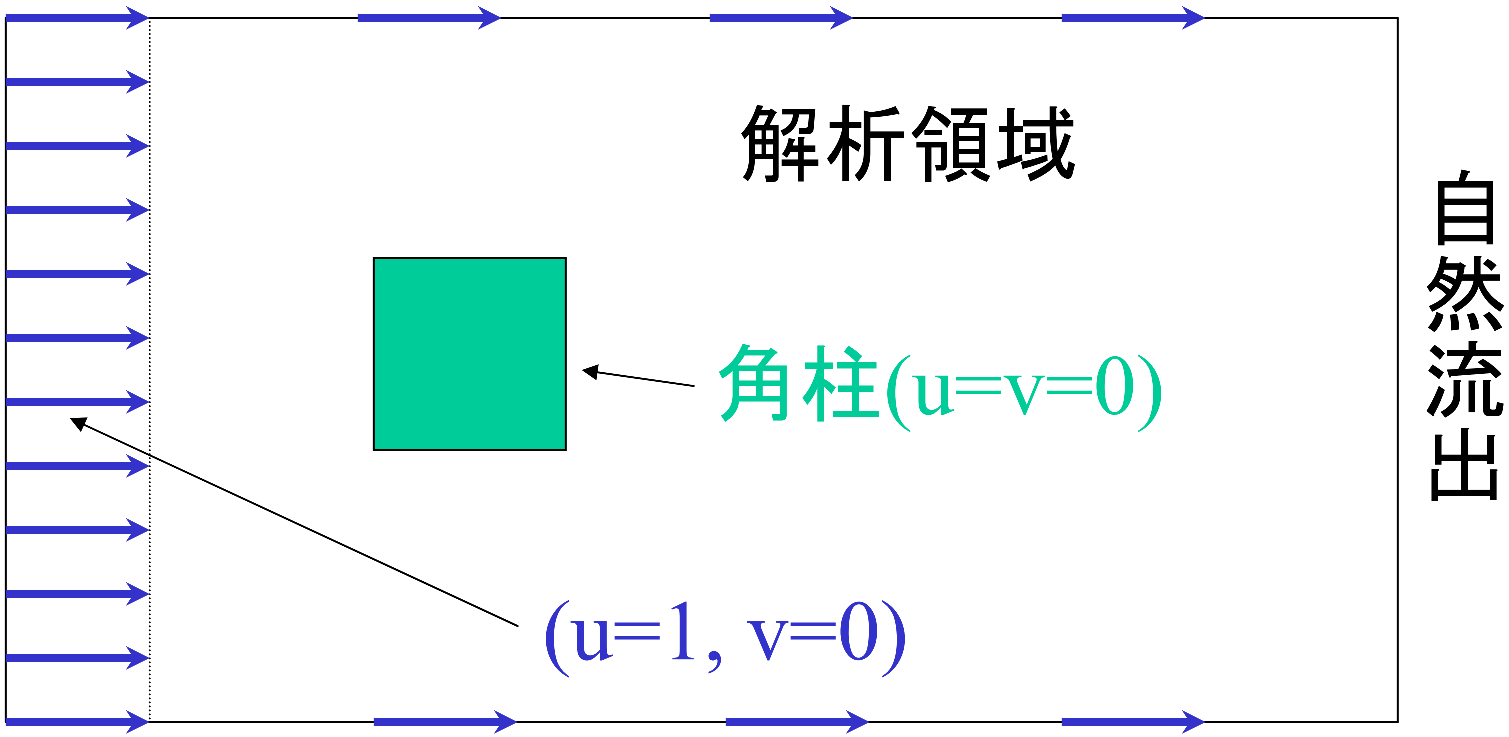
「5. 流れ関数-渦度法でキャビティ流れ」参照

- 支配方程式

$$\Delta p = -\, div\,(v \cdot \nabla\,)v + \frac{div\,(v)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla\,)v - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v = -\nabla\,p$$

7. 速度-圧力法で角柱周りの流れ



7.1 非定常角柱周りの流れ

- 支配方程式

$$\Delta p = -\,div\,(v \cdot \nabla)v + \frac{div\,(v)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v = -\nabla p$$

- 計算上の注意事項

丸め誤差により対称性を壊さないこと

7.2 境界条件と初期条件

- 境界条件

  u=0, v=0　　on 角柱上

  u=1, v=0　　on 周囲境界

- 初期条件

  ポテンシャル流れで計算(対称性を確認要)

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\partial \varphi / \partial x = u, \quad \partial \varphi / \partial y = v$$