RSA暗号計算 No.6
MBPS(多重基底多項式ふるい法)

2007年5月
後　保範　(東京工芸大学)

1

目次

2

1. MBPSの概要

MBPS (Multiple Base Polynomial Sieve)
のアイデアー

QS　: $(x+k)^2 \equiv s \cdot x+t \pmod n$
　　$s \cdot x+t$を素数基底で分解

MBPS: $(x+a)(x+b)-f(x)=v(s \cdot x+t)$, $f(M)=n$
　　$x+a, x+b, s \cdot x+t$を素数基底で分解
　　及び共通一次式の取出し

3

1.1 MBPSの種類

(1) DBPS(2重基底多項式ふるい法)
　(a) f(x)は2次多項式→ここで説明
　(b) f(x)は3次多項式
　(c) より高速化したもの → DBPS2
(2) TBPS(3重基底多項式ふるい法)
　DBPSにGNFSの素イデアル分解の
　方法を取り入れた方式
　(2次式、3次式及びTBPS2)がある

4

2. 2次のDBPSによるふるい

2次のDBPSによるふるいの手順
(1) 2次関数$f(x)=Ax^2+Bx+C$と$M(f(M)=n)$の選定
(2) 素数基底の選定とa,bの範囲決定
(3) $A_1 \cdot M+a, A_2 \cdot M+b$を素数基底で分解し、分解できた、a,bをふるいに採用。ここで、$A_1 \cdot A_2=A$とする。
(4) $A_1 \cdot M+a, A_2 \cdot M+b$が分解できなく、$|a|,|b|$が小 さいものを指定個数だけ1次基底に採用
(5) $g(x)=(A_1 \cdot x+a)(A_2 \cdot x+b)-f(x)=v \cdot (s \cdot x+t)$からs,tを計算してふるいをおこなう。(素数基底+1次式基底)の数より採用データ数を多くする
(6) ふるいで採用したデータで行列を作成

5

2.1 2次関数の選定

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$で
　$f(M) \equiv 0 \pmod n$, nは分解対象数
を定める。ここで、A,B,C及びMは整数。
そのとき、下記のようにする。
(a) $|A|+|B|+|C|$をできるだけ小さく
(b) ほぼ同じ桁数の整数A_1, A_2を使用し
　AはA=$A_1 \cdot A_2$と分解できる。

6

2.2 素数基底の選定

素数基底は下記により選定する

(1) 指定値以下の素数を総て選定

(2) -1も素数基底に加える

<理由>

$g(x)=(A_1\cdot x+a)(A_2\cdot x+b)-f(x)=v\cdot(s\cdot x+t)$ とするとき、$A_1\cdot M+a$, $A_2\cdot M+b$,$s\cdot M+t$は正の整数であるがvは負の値を含む整数となるため。

7

2.3 A_1M+a,A_2M+bの素数基底分解

(1) 整数a,bの範囲を決める

(2) $A_1\cdot M+a$及び$A_2\cdot M+b$を素数基底で分解する。

(3) 分解された、$A_1\cdot M+a$及び$A_2\cdot M+b$はふるいのために保存する。

(4) 分解されないものは、1次式基底の候補に入れる。

8

2.4 1次式基底の選定

(1) $A_1\cdot M+a$及び$A_2\cdot M+b$が素数基底で分解されず、1次式基底候補に入ったものの中で|a|,|b|の値が指定以下のもの。

(2) $g(x)=(A_1\cdot x+a)(A_2\cdot x+b)-f(x)=v\cdot(s\cdot x+t)$ でふるいを行い、同一の$s\cdot x+t$で、vが異なり、かつ$s\cdot x+t$が素数基底で分解されないもの。

9

2.5 g(x)=v(sx+t)計算によるふるい

(1) 選定した$A_1\cdot x+a$,$A_2\cdot x+b$を使用し下記で整数v,s,tを計算。ただし、sは正又はゼロ

$g(x)=(A_1\cdot x+a)(A_2\cdot x+b)=v\cdot(s\cdot x+t)$

(2) s,|t|が指定値以下なら下記を行う。

(a) $s\cdot x+t$が1次式基底なら採用

(b) $s\cdot M+t$が素数基底で分解できれば採用

(c) 同一の$s\cdot x+t$が複数(vは異なる)なら採用

10

2.6 ふるい結果の行列作成

(1) 採択したデータが、素数基底+1次式基底の合計数以上になれば行列を作成

(2) 各データに毎に下記項目の値を入れる

(a) a,bの値

(b) 素数基底の各素数のベキ数

(c) 1次式基底の各1次式のベキ数

(3) 各素数と各1次式に対応するベキ数は$A_1\cdot x+a$,$A_2\cdot x+b$なら正、$v\cdot(s\cdot x+t)$なら負

11

3. DBPSによる因数分解

ふるい結果の行列による因数分解

(1) 0-1行列の作成

(2) 行列消去による従属行の算出

(3) 従属行から$\alpha^2\equiv\beta^2 \pmod n$算出

(4) GCD($|\alpha-\beta|$,n)を計算し、nを因数分解

12

4. DBPSによるふるい例

計算対象

n = 55751が分解対象数

$f(x) = 2x^2 - 27$

$f(M) \equiv 0 \pmod{n}$, M=167

$(2x+a)\cdot(x+b) - f(x) = v\cdot(s\cdot x+t)$

13

4.1 使用する基底因子

(1) 素数基底: P

23までの素数と-1の10個

P = {-1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}

(2) 1次式基底: B (素数基底で分解不可)

M+b及び2M+aより5個選ぶ

B = {M-3, M, 2M+1, 2M+3, 2M+5}

14

4.2 ふるいの基本式

$f(x) = 2x^2 - 27$

$g(x) = (2x+a)(x+b) - f(x)$

$= S\cdot x + T = v\cdot(s\cdot x+t)$

$S = a + 2b$, $T = a\cdot b + 27$

$v = GCD(|S|,|T|)\cdot sign(S)$

$s = S/v$, $t = T/v$

15

4.3 (2x+a),(x+b)の選定

(1) |a|,|b|がともに9以下を対象

(2) 2M+a, M+bが素数基底Pで分解

a = {-9, -4, -2, 2, 4, 6, 8, 9}

b = {-7, -6, -5, -2, 1, 2, 3, 4, 8, 9}

(3) 1次式基底

B1=M-3=164, B2=M=167, B3=2M+1=235

B4=2M+3=237, B5=2M+5=239

16

4.4 ふるいの方針

(1) ふるいの基本式により該当するa,b からv,s,tを計算

$g(x)=(2x+a)(x+b)-f(x)=v\cdot(s\cdot x+t)$

(2) |s|が9以下ならふるい候補に入れる

(3) s·x+tが1次式基底に一致するか、s·M+tが素数基底で分解されたら採用(篩結果NO.に番号を入れる)

17

4.5 ふるいの過程(1/4)

番号	g(x)の係数 a	b	s	t	sM+t の値	sM+t の基底での分解結果	篩結果 No.
1	0	*4*	8	27	1363		
2	0	*3*	6	27	1029	$3(2M+9)=3\cdot7^3$	1
3	0	*2*	4	27	695		
4	0	*1*	2	27	361	19^2	2
5	0	0	0	27	27	3^3	3
6	0	*-2*	-4	27	-641		
7	0	-3	-6	27	-975	$-3(2M-9)=-3\cdot5^2\cdot13$	4
8	1	*4*	9	31	1534		
9	1	*3*	7	30	1199		
10	1	*2*	5	29	864	$2^5\cdot3^3$	5
11	1	*1*	3	28	529	23^2	6
12	1	0	1	27	194		
13	1	*-2*	-3	25	-476	$-2^2\cdot7\cdot17$	7
14	1	-3	-5	24	-811		
15	1	*-5*	-9	22	-1481		

18

4.5 ふるいの過程(2/4)

16	*2*	*3*	8	33	1369		
17	*2*	*2*	6	31	1033		
18	*2*	*1*	4	29	697		
19	*2*	*-2*	-2	23	-311		
20	*2*	-3	-4	21	-647		
21	*2*	*-5*	-8	17	-1319		
22	3	*3*	9	36	1539	$9(M+4)=3^4 \cdot 19$	8
23	3	*2*	7	33	1202		
24	3	*1*	5	30	865		
25	3	0	3	27	528	$3(M+9)=2^4 \cdot 3 \cdot 11$	9
26	3	*-2*	-1	21	-146		
27	3	-3	-3	18	-483	$-3(M+6)=-3 \cdot 7 \cdot 23$	10
28	3	*-5*	-7	12	-1157		
29	3	*-6*	-9	9	1494		
31	*4*	*2*	8	35	1371		
32	*4*	*-2*	0	19	19	*19*	11

19

4.5 ふるいの過程(3/4)

33	*4*	-3	-2	15	-319		
34	*4*	*-5*	-6	7	-995		
35	*4*	*-6*	-8	3	-1333		
36	*-4*	*4*	4	11	697		
37	*-4*	*3*	2	15	349		
38	5	*2*	9	37	1540	$2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	12
39	5	*1*	7	32	1201		
40	5	0	5	27	862		
41	5	*-2*	1	17	184	$2^3 \cdot 23$	13
42	5	-3	-1	12	-155		
43	5	*-5*	-5	2	-833	$-7^2 \cdot 17$	14
44	5	*-6*	-7	-3	-1172		
45	5	-7	-9	-8	-1511		
46	*6*	*-3*	0	9	9	3^2	15
47	*6*	*-5*	-4	-3	-671		
48	*6*	*-6*	-6	-9	-1011	-3(2M+3)	16
49	*6*	-7	-8	-15	-1351		

20

4.5 ふるいの過程(4/4)

50	*8*	*-5*	-2	-13	-347		
51	*8*	*-6*	-4	-21	-689		
52	*8*	*-7*	-6	-29	-1031		
53	*9*	0	9	27	1530	$9(M+3)=2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17$	17
54	*9*	*-2*	5	9	844		
55	*9*	-3	3	0	501	3M	18
56	*9*	*-5*	-1	-18	-185		
57	*9*	*-6*	-3	-27	-528	$-3(M+9)=-2^4 \cdot 3 \cdot 11$	19
58	*9*	*-7*	-5	-36	-871		
59	*-9*	*9*	9	-54	1449	$9(M-6)=3 \cdot 27 \cdot 23$	20
60	*-9*	*8*	7	-45	1124		
61	*-9*	*4*	-1	-9	-176	$-(M+9)=-2^4 \cdot 11$	21
62	*-9*	3	-3	0	-501	-3M	22
63	*-9*	*2*	-5	-9	-826		
64	*-9*	*1*	7	18	-1151		
65	*-9*	*0*	-9	27	-1476		

21

4.6 ふるい結果の行列(1/2)

No	g(x)の係数		mod N での等式														
			素数基底										一次式基底				
	a	b	-1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	B1	B2	B3	B4	B5
1	0	3	0	2	-1	1	-3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	4	1	0	1	0	0	0	-2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
4	0	-3	1	1	-1	-2	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	0	0
5	1	2	0	-5	-3	0	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	3	1	0	1	0	0	0	0	-2	0	0	1	0	0
7	1	-2	1	-2	1	1	-1	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0
8	3	3	0	1	-4	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0
9	3	0	0	-4	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
10	3	-3	1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0

22

4.6 ふるい結果の行列(2/2)

11	4	-2	0	1	1	1	0	1	2	0	-1	0	0	0	0	0	0
12	5	2	0	-2	0	-1	-1	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	1
13	5	-2	0	-3	1	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
14	5	-5	1	1	4	0	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1
15	6	-3	0	2	-2	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
16	6	-6	1	2	-1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	0
17	9	0	0	-1	-2	-1	3	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0
18	9	-3	0	0	-1	0	3	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
19	9	-6	1	-4	-1	0	4	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	-9	9	0	4	-2	2	-1	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0
21	-9	4	1	-4	2	2	0	-1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
22	-9	3	1	1	-1	3	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	0

23

5. DBPSによる因数分解例

ふるい結果の行列による因数分解

(1) 0-1行列の作成

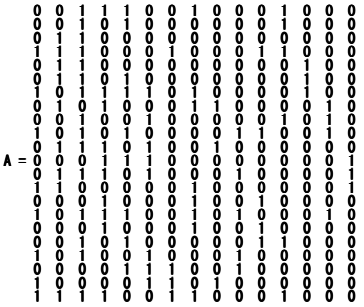
(2) 行列消去による従属行の算出

(3) 従属行から$\alpha^2 \equiv \beta^2 \pmod n$算出

(4) GCD($|\alpha - \beta|$,n)を計算し、
nを因数分解

24

5.1 作成した0-1行列



25

5.2 消去した行列

```
行   | 00000000001111111111222: 列番号(10)
番号 | 12345678901234567890123: 列番号(1)
-----+-----------------------
14   | 00001010000101000000000 :従属行1
15   | 01001010111011010000000
16   | 01001010100111001000000
17   | 01001010111011000100000
18   | 11001010111011000010000
19   | 11001010000111000001000
20   | 00110000110000000000100
21   | 01011011010110000000010
22   | 01011010110110000000001 :従属行9
```

各行の1がある列番号が従属行となる

26

5.3 従属行一覧

(1) 従属行1: 5, 7, 12, 14
(2) 従属行2: 2, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 15
(3) 従属行3: 2, 5, 7, 9, 12, 13, 16
(4) 従属行4: 1, 3, 17
(5) 従属行5: 1, 2, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 18
(6) 従属行6: 1, 2, 5, 7, 12, 13, 19
(7) 従属行7: 3, 4, 9, 10, 20
(8) 従属行8: 2, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 21
(9) 従属行9: 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 22

27

5.4 従属行1の $\alpha^2 \equiv \beta^2$ の計算

ふるい結果の行列の5,7,12,14行の素数基底及び1次式基底で等式を作成する。
このとき、B1=164,B2=167,B3=335,B4=337,B5=339である。
左辺は正のベキ、右辺は負のベキを集める。

$(3\cdot 13^2\cdot 335\cdot 339)^2 \equiv (2^4\cdot 7^2\cdot 17)^2 \pmod{55751}$

即ち、$13328^2 \equiv 13328^2 \pmod{55751}$

28

5.5 各従属行の $\alpha^2 \equiv \beta^2$

(1) $13328^2 \equiv 13328^2 \pmod{55751}$: 自明解
(2) $24042^2 \equiv 11024^2 \pmod{55751}$
(3) $11477^2 \equiv 1824^2 \pmod{55751}$
(4) $27^2 \equiv 27^2 \pmod{55751}$: 自明解
(5) $24042^2 \equiv 11024^2 \pmod{55751}$
(6) $11477^2 \equiv 1824^2 \pmod{55751}$
(7) $13041^2 \equiv 13041^2 \pmod{55751}$: 自明解
(8) $24042^2 \equiv 11204^2 \pmod{55751}$
(9) $24042^2 \equiv 13041^2 \pmod{55751}$

29

5.6 因数分解結果

自明解でないものだけ

(1)(5)(8)(9) : $24042^2 \equiv 11024^2 \pmod{55751}$
GCD(|24042-11024|, 55751) = 283
→ 55751 = 283 × 197と因数分解

(3)(6) : $11477^2 \equiv 1824^2 \pmod{55751}$
GCD(|11477-1824|, 55751) = 197
→ 55751 = 197 × 283と因数分解

30