RSA暗号計算 No.1
RSA暗号とユークリッド互助法

2007年5月

後　保範　(東京工芸大学)

目次

1. 暗号化方式

(1) 秘密鍵方式
共通鍵、対称鍵とも言う
代表例: DES(Data Encryption Standard), IDEA
長い文章全体を暗号化する

(2) 公開鍵方式
非対称鍵とも言う。公開鍵と秘密鍵を使用
代表例: RSA方式
短いメッセージ、電子署名、共通鍵の交換

1.1 秘密鍵方式

- 送信者と受信者は1つの鍵を秘密に共有し、暗号化と復号化に共通の鍵を使う。
- 暗号の強度を確保するには鍵の長さが重要なファクターとなるが、鍵の長さが増せば処理コストが増加する。現在64ビット又は128ビット
- DESなどのように暗号アルゴリズムを公開したものと、軍事用の様に非公開のものがある
- 受信者が遠隔地にいる場合、この秘密の鍵を安全でない通信路を使って、どのように鍵を配布するのかが問題となる。

1.2 公開鍵方式

- 公開鍵と秘密鍵の2組の鍵を使う方法を言う
- 「短いメッセージの暗号化」、「電子署名」、「共通鍵の交換」など目的の異なる用途に用いられる。
- 1組の秘密鍵と公開鍵で多数の相手に通信可能
- 公開鍵方式は共通鍵方式に比べて処理コストか高い(1024ビットRSAではDESの約1000倍)
- 素因数分解(RSA)の 困難さを使って定義された暗号化や復号化の方式を使う
- 送信者(暗号化する人)は秘密鍵を知らない

2. RSA暗号化と復号化の方法

RSA暗号鍵の作成
(1) 素数p, qを選ぶ。
(2) $n = p \times q$及び$f = (p-1) \times (q-1)$を計算
(3) 素数eを選ぶ。
(4) $d = 1/e \bmod(f)$となるdを計算する。

(e,n)が公開暗号化鍵、(d,n)が復号鍵となる。

2.1 暗号化と復号化

RSA暗号化
(1) 文をn以下の数Mに変換（公開方法）
(2) $C=M^e \bmod(n)$で暗号Cを作成

RSA復号化
(1) $M=C^d \bmod(n)$で元の数Mに復号
(2) 数Mを文に変換（公開方法）

7

2.2 復号化の数学理論

n=p×qとMが互に素なら $M^{(p-1)(q-1)}=1 \bmod(n)$
なるオイラーの定理を使用

$$C^d \bmod(n) = (M^e)^d \bmod(n) = M^{\alpha f+1} \bmod(n)$$
$$= (M^{(p-1)(q-1)})^{\alpha} \times M \bmod(n)$$
$$= M \bmod(n) = M$$

$ed = 1 \bmod(f)$で $ed = \alpha f+1$ (αは整数)を利用

8

2.3 RSA暗号変換例

(1) 鍵とメッセージ
公開暗号鍵：e=43291、n=130733
秘密復号鍵：d=105691
メッセージ: YES <==> M = 16836
(2) 暗号化
$C = M^e = 16836^{43291} = 73724 \bmod 130733$
(3) 復号化
$M = C^d = 73724^{105691} = 16836 \bmod 130733$

9

2.3.1 RSAの鍵の作成例

(1) 素数p,qを選びn,fを計算
p=239, q=547 ： 選定
n=p×q=130733, f=(p-1)×(q-1)=129948
(2) 暗号鍵(素数,e<f)を選定
e = 43291 , (e,n) = (43291,130733)を公開
(3) 復号鍵(秘密鍵,d)の計算
$d = 1/e = 1/43291 = 105691 \bmod f$
この計算はユークリッド互除法で計算する

10

2.3.2 復号鍵の具体的計算(1/3)

(f,e)=(129948,43291)にユークリッド互除法

129948 = 3×43291 + 75 → …

43291 = 577×75 + 16 → …
75 = 4×16 + 11 → …
16 = 1×11 + 5 → 5 = 16 - 1×11
11 = 2 ×5 + 1 → 1 = 11 - 2 ×5

11

2.3.2 復号鍵の具体的計算(2/3)

互除法の結果(逆順)からe,fの一次式を作成
1 = 11 - 2 ×5 = 11 – 2 ×(16 - 1×11)
= 3×11 - 2 ×16 = 3×(75 - 4×16) - 2 ×16
= 3×75 - 14 ×16
= 3×75 - 14 ×(43291 – 577 ×75)
= 8081×75 - 14 ×43291
= 8081×(f - 3×e) - 14 ×e
= 8081×f - 24257×e

12

2.3.2 復号鍵の具体的計算(3/3)

$1 = 8081 \times f - 24257 \times e$ のmod f の計算

$1 = 8081 \times f - 24257 \times e \mod f$

$= -24257 \times e \mod f$

$= (f - 24257) \times e \mod f$

$= (129948 - 24257) \times e \mod 129948$

$= 105691 \times e \mod 129948$

従って複合鍵(d)は

$d = 1/e = 105691 \mod 129948$

13

3. 算術演算の時間評価

算術演算の時間評価

(1) 暗号処理では、整数n又はその桁数mに対する演算量を$O(n), O(n^{1/4})$や$O(2^m), O(m^5)$のように表示する。

(2) 代表的な時間評価

$O(\alpha \log(n)), O(m^{\alpha})$: 多項式時間

$O(2^{c\sqrt{m\log(m)}})$: 中間時間(指数と多項式)

$O(n^c)$, $O(2^{cm})$: 指数時間(c, αは定数)

14

3.1 主な演算の時間評価

nは2進m桁の数とする。

1. RSA暗号化及び複合化
   (1) M^e or $C^d \mod(n)$: $O(m^2\log(m))$
2. 素数判定
   (1) 2002年のアルゴリズム : $O(m^3)$
3. 素因数分解
   (1) 試行割算法 : $O(2^{m/2})$
   (2) ρ 法 : $O(m^3 2^{m/4})$
   (3) 2次ふるい法: $O(2^{(m\cdot\log(m))^{1/2}})$
   (4) 数体ふるい法: $O(2^{m^{1/3}\cdot\log(m)^{2/3}})$

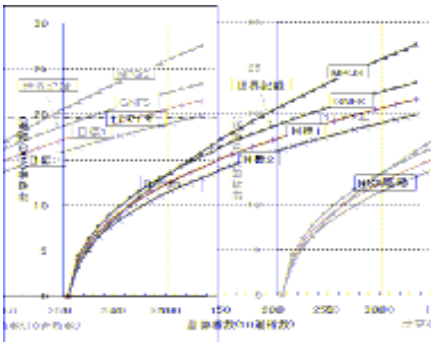
15

3.2 時間評価の具体的値

m	m^3	$2^{\sqrt{m\log(m)}}$	$2^{m/4}$	2^m
50	$1.\times10^5$	$1.\times10^5$	$6.\times10^3$	$1.\times10^{15}$
100	$1.\times10^6$	$6.\times10^7$	$3.\times10^7$	$1.\times10^{30}$
200	$8.\times10^6$	$6.\times10^{11}$	$1.\times10^{15}$	$2.\times10^{60}$
400	$6.\times10^7$	$5.\times10^{17}$	$1.\times10^{30}$	$3.\times10^{120}$
800	$5.\times10^8$	$3.\times10^{26}$	$2.\times10^{60}$	$7.\times10^{240}$

16

3.3 RSA暗号解読の計算量



17

4. ユークリッド互除法とオイラー関数

最小公倍数 (Greatest Common Divisor)

(1) GCD(a,b) : 整数a,bの最小公倍数

(2) a > bで下記が成立 (a/bは整数以外)

GCD(a,b) = GCD(a mod(b), b)

(3) (2)を繰り返し使用すると

ユークリッド互除法が得られる。

18

4.1 ユークリッド互除法の計算例

GCD(1547,560)を求める

GCD(1547, 560)

= GCD(1547 mod(560), 560)

= GCD(427, 560)

= GCD(427, 560 mod(427))

= GCD(427, 133) = GCD(28, 133)

= GCD(28, 21) = GCD(7, 21) = 7

19

4.2 オイラーの関数($\varphi(n)$)

1. オイラー関数($\varphi(n)$)の定義
   nより小さくnとは素な非負整数の個数
   $\varphi(n) \equiv \left|\{0 < t < n \mid GCD(t,n) = 1\}\right|$
2. $\varphi(n)$の計算方法
   $n = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\alpha_j}$とする。
   $\varphi(n) = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\alpha_j - 1}(p_j - 1)$

20

4.3 オイラーの定理

1. フェルマーの小定理
   素数p と整数M (<p) に対して
   $M^{p-1} = 1 \mod p$
2. オイラーの定理
   $GCD(a,m) = 1$ならば
   $a^{\varphi(m)} = 1 \mod(m)$

21

4.4 平方剰余と相互法則

平方剰余とルジャンドル記号

(1) $b^2 = a \mod(p)$ となる、整数bが
存在する　：aは法pで平方剰余
存在しない：aは法pで非平方剰余

(2) ルジャンドル記号 (pは3以上の素数)

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{(p-1)/2} \mod p = \begin{cases} 0: & a\text{が}p\text{の倍数} \\ 1: & a\text{が法}p\text{で平方剰余} \\ -1: & a\text{が法}p\text{で非平方剰余} \end{cases}$$

22

5. 素数か合成数かの判定法

- 昨年(2002年)多項式時間で、素数か合成数かを判定する方法をインドの数学者が発見
- インドのカンプールにあるインド工科大学で、Manindra Agrawal氏と、その教え子のNeeraj Kayal氏、Nitin Saxena氏が開発した新しいアルゴリズムは、毎回正確な結果が得られるとされている。
- 米ラトガーズのニュージャージー州立大学でコンピュータサイエンスを教えるEric Allender教授は、次のように語る。「現在の暗号化ソフトの最も明白な弱点は、素数判定の結果が正しいという保証がない点だ。この新しいアルゴリズムは、何世紀も前から存在し、数十年にわたって熱心な研究が行われてきた根本的な疑問を解決するものだ」。
- このアルゴリズムに関するAgrawal氏の論文「PRIMES is in P」は2002年に発表され、この分野でかなりの話題を呼んでいる。古代中国やギリシャの時代から、数学者の心を捕らえてきた数学的問題を解決する方法だからだ。

23

5.1 Rabin素数判定法

- 確率的な素数判定法(素数確率:1- $(1/4)^L$)

n-1=2^smとなる整数sと奇数mを求める。
k=1,2,・・・,Lか合成数となるまで反復する。
  2 < b < n-1 なる乱数bを求める。
  y = b^m mod n
  if(y=1 or y=-1) → nは擬素数(次のkへ)
  i=1,2, ・・・,sまで反復
    y = y^2 mod n
    if(y=1) → nは合成数(終了)
    if(y=-1) → nは擬素数(iの反復終了,次のkへ)
  nは合成数(終了)

24